Gesundheits- und Tourismusmanagement – GTM

Sport- und Eventmanagement – SEM

Wirtschaftspsychologie – WPSY

Aufgabensammlung Statistik

Dipl. Mathematiker (FH) Roland Geiger
Rosenstr. 23
72631 Aichtal
cs.geiger@t-online.de
www.cs-geiger.de

Inhaltsverzeichnis

Allgemeine Regeln

Keine Handys, Smartphones, Tablets, Notebooks, MP3-Player, und sonstige elektronischen Geräte.

(Sollten auch nicht auf dem Tisch liegen)

Sollten Sie unbedingt kommunizieren müssen, so gehen Sie freiwillig aus dem Raum oder Sie bekommen von mir eine Pause zugeteilt, in der Sie in Ruhe Ihre Kommunikation durchführen können.

Internet

Lösungen zu den Aufgaben

Internet

http://www.cs-geiger.de/statistik.htm

Computerseminare, Mathematik und Statistik

Angewandte Statistik Gesundheits- und Tourismusmanagement und Sport- und Eventmanagement

BodenseeCampus

Skripte	Lösungen
Skript-Angewandte Statistik	

Formelsammlung

Formelsammlung

Aufgabensammlung	
Übungsaufgaben	Lösung

Tutorium	
Tutorium	Lösung

Klausuren

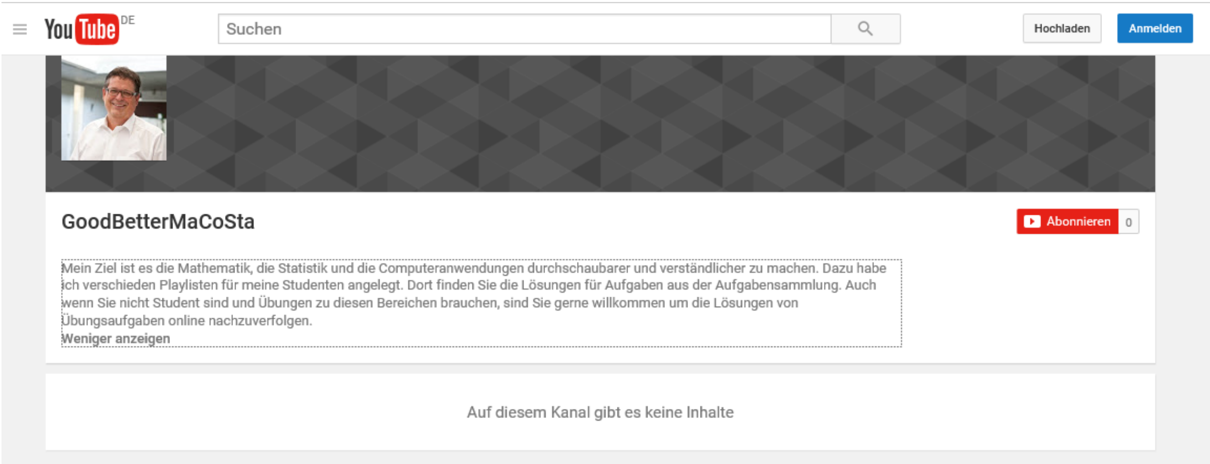
Alte Klausuraufgaben siehe Aufgabensammlung

Roland Geiger - Rosenstr.23 - 72631 Aichtal
Fon 07127-960750 - Fax 07127-960751 - cs.geiger@t-online.de

QR-Code

YouTube

http://www.youtube.com/channel/UCro4ldWf20euH8u1SXU3l-g



Grundlagen

Aufgabe 1:

Beim wiederholten werfen eines Spielwürfels wurde bei

80% aller Würfe eine Augenzahl ≤ 5

65% aller Würfe eine Augenzahl ≤ 4

45% aller Würfe eine Augenzahl ≤ 3

30% aller Würfe eine Augenzahl ≤ 2

5% aller Würfe eine Augenzahl ≤ 1

festgestellt.

Mit welchen relativen Häufigkeiten fielen die einzelnen Augenzahlen.

Lösung:

100%	aller Würfe eine Augenzahl ≤ 6	mit	20%
80%	aller Würfe eine Augenzahl ≤ 5	mit	15%
65%	aller Würfe eine Augenzahl ≤ 4	mit	20%
45%	aller Würfe eine Augenzahl ≤ 3	mit	15%
30%	aller Würfe eine Augenzahl ≤ 2	mit	25%
5%	aller Würfe eine Augenzahl ≤ 1	mit	5%

Aufgabe 2:

Was ist die Grundgesamtheit?

Lösung:

Die Grundgesamtheit ist die Menge aller interessanten Daten.

Aufgabe 3:

Welche Arten von Skalen kennen Sie?

Lösung:

Nominalskala (Ausprägungen sind Namen oder Bezeichnungen)

Ordinalskala (wenn Ausprägungen zusätzlich eine Rangfolge zum Ausdruck bringen.

metrische Skala (**Intervallskala** und **Verhältnisskala**) (wenn Differenzen und Verhältnisse von Merkmalausprägungen sinnvoll sind).

Aufgabe 4:

Was heißt es, wenn diskrete Merkmale vorliegen?

Lösung:

Wenn die Ausprägungen nur isolierte Zahlwerte annehmen können.

Aufgabe 5:

Was ist eine Klassenhäufigkeit?

Lösung:

Die Häufigkeiten, mit welchen Stichprobenwerte auf die einzelnen Klassen entfallen.

Aufgabe 6:

Bei einer Fabrikationskontrolle wurden 480 elektrische Widerstände untersucht, 12 waren defekt. Bei einer nächsten Kontrolle waren von 700 Widerständen 14 nicht in Ordnung. Welche Kontrolle ergab das bessere Ergebnis? (14 von 700)

Lösung:

$$h_i = \frac{n_i}{n} = \frac{12}{480} = 0{,}025 \qquad h_i = \frac{n_i}{n} = \frac{14}{700} = 0{,}02$$

14 von 700

Aufgabe 7:

Welche Zufallsexperimente sind in der Statistik von Interesse?

Lösung:

Von Interesse sind solche Zufallsexperimente, die wiederholt (theoretisch sogar beliebig oft) durchgeführt werden können.

Aufgabe 8:

Bei einer Messung von Pflanzen traten folgende Längenmessungen auf:

4,6	5,5	6,2	6,5	6,5	6,4	6,5	6,2	5,4	5,7
5,1	5,5	5,9	6,4	5,9	6,5	6,2	5,9	5,1	6,2

Erstellen Sie aus diesen Werten eine Häufigkeitstabelle. In dieser sollte die absolute Häufigkeit, die relative Häufigkeit, die absolute kumulierte Häufigkeit und die relative kumulierte Häufigkeit dargestellt werden.

Lösung:

Länge ai	Absolute Häufig--keit ni	relative Häufig-keit hi	Absolute Sum-men--häufig-keit	Relative Sum-men--häufig-keit
4,6	1	0,05	1	0,05
5,1	2	0,10	3	0,15
5,4	1	0,05	4	0,20
5,5	2	0,10	6	0,30
5,7	1	0,05	7	0,35
5,9	3	0,15	10	0,50
6,2	4	0,20	14	0,70
6,4	2	0,10	16	0,80
6,5	4	0,20	20	1,00

Aufgabe 9:

Im Rahmen einer klinischen Studie wird die Wirksamkeit einer therapeutischen Maßnahme an 22 Patienten untersucht. Bei n = 14 Patienten ist die Therapie erfolgreich.

Welche Darstellung der entsprechenden relativen Häufigkeit ist am sinnvollsten, für jemanden, der sich mit Statistik auskennt und für jemanden der von Statistik keine Ahnung hat.

Lösung:

1) h_1= 64%

Die richtige Lösung anzugeben mag für manchen Leser schwierig sein, denn eigentlich ist keine einzige der Antworten A - E gänzlich falsch. Bei 22 Beobachtungseinheiten würde man mit einer Prozentangabe eine Genauigkeit vortäuschen, die nicht vorhanden ist. Deshalb ist die Antworten A nicht sinnvoll.

2) h_1 = 0,63636

Die richtige Lösung anzugeben mag für manchen Leser schwierig sein, denn eigentlich ist keine einzige der Antworten A - E gänzlich falsch. Bei 22 Beobachtungseinheiten würde man mit 5 Dezimalstellen eine Genauigkeit vortäuschen, die nicht vorhanden ist. Deshalb ist die Antworten B nicht sinnvoll.

3) $h_1 = 14 / 22$

Die Angabe C ist präzise und sinnvoll - und verheimlicht dennoch nicht, dass die Berechnung der Häufigkeit auf einer relativ kleinen Anzahl von Beobachtungseinheiten basiert. Die richtige Lösung anzugeben mag für manchen Leser schwierig sein, denn eigentlich ist keine einzige der Antworten A - E gänzlich falsch. Gefragt ist jedoch nicht nach einer richtigen Häufigkeitsangabe, sondern nach einer sinnvollen. Bei 22 Beobachtungseinheiten würde man mit einer Prozentangabe oder einer Häufigkeit mit 5 Dezimalstellen eine Genauigkeit vortäuschen, die nicht vorhanden ist. Deshalb sind die Antworten A und B nicht sinnvoll. Die Antworten D und E sind zwar richtig, aber zu unpräzise.

4) h_1 liegt über 50 %.

Die richtige Lösung anzugeben mag für manchen Leser schwierig sein, denn eigentlich ist keine einzige der Antworten A - E gänzlich falsch. Die Antworten D ist zwar richtig, aber zu unpräzise.

5) h_1 = beträgt zwischen 60 % und 70 %.

Die richtige Lösung anzugeben mag für manchen Leser schwierig sein, denn eigentlich ist keine einzige der Antworten A - E gänzlich falsch. Die Antworten E ist zwar richtig, aber zu unpräzise.

Aufgabe 10:

In zwei Städten wurden je 60 Personen nach der Anzahl ihrer Kinobesuche in den letzten 6 Monaten gefragt. Man erhielt die folgenden Daten:

Kinobesuche/6 Monate	0	1	2	3	4	5	6
Zahl der Personen in A	6	8	8	11	14	11	2
Zahl der Personen in B	5	7	12	12	12	7	5

Erstellen Sie für jede dieser Umfragen eine Häufigkeitstabelle. Stellen Sie in dieser die absolute und relative Häufigkeit sowie die absolute und relative Summenhäufigkeit dar.

Lösung:

Stadt A

Anzahl	abs. H.	rel. H.	abs. SH	rel. SH
0	6	6/60	6	6/60
1	8	8/60	14	14/60
2	8	8/60	22	22/60

3	11	11/60	33	33/60
4	14	14/60	47	47/60
5	11	11/60	58	58/60
6	2	2/60	60	60/60
	60	1		

Stadt B

Anzahl	abs. H.	rel. H.	abs. SH	rel. SH
0	5	5/60	5	5/60
1	7	7/60	12	12/60
2	12	12/60	24	24/60
3	12	12/60	36	36/60
4	12	12/60	48	48/60
5	7	7/60	55	55/60
6	5	5/60	60	60/60
	60	1		

Aufgabe 11:

Jemand schlägt vor, die Daten der beiden Untersuchungen zusammenzufassen.

Folgen Sie dem Vorschlag und erstellen Sie eine neue Häufigkeitstabelle.

Lösung:

Anzahl	abs. H.	rel. H.	abs. SH	rel. SH
0	11	11/120	11	11/120
1	15	15/120	26	26/120
2	20	20/120	46	46/120
3	23	23/120	69	69/120
4	26	26/120	95	95/120
5	18	18/120	113	113/120
6	7	7/120	120	120/120
	120	1		

Aufgabe 12:

Erläutern Sie die Bedeutung des Skalenniveaus statistischer Daten!

Lösung:

Anhand des Skalenniveaus muss untersucht werden, welche statistischen Berechnungen überhaupt erlaubt sind.

Aufgabe 13:

Geben Sie das Skalenniveau folgender Merkmale an

a) Jahresumsatz eines Unternehmens

b) Körperlänge von männlichen Schülern

c) Nationalität von Sportlern

d) Geschlecht der Studierenden der Hochschule

e) Haushaltsgröße (Personen)

f) Schulnoten von 1 bis 6

Lösung:

a) metrische Skala

b) metrische Skala

c) Nominalskala

d) Nominalskala

e) metrische Skala

f) Ordinalskala

Aufgabe 14:

Folgende Körpergrößen wurden von Schülern in der vierten Klasse gemessen:

140; 145; 135; 139; 139; 130; 134; 144; 138; 140; 140; 152; 148

Erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle. In diese soll die absolute Häufigkeit, die relative Häufigkeit, die absolute Summenhäufigkeit und die relative Summenhäufigkeit eingetragen werden.

Lösung:

Größe	abs. Häufigkeit	rel. Häufigkeit	Abs. Summenhäufigkeit	Rel. Summenhäufigkeit
130	1	1/13	1	1/13
134	1	1/13	2	2/13
135	1	1/13	3	3/13
138	1	1/13	4	4/13
139	2	2/13	6	6/13
140	3	3/13	9	9/13
144	1	1/13	10	10/13

145	1	1/13	11	11/13
148	1	1/13	12	12/13
152	1	1/13	13	13/13
	13			

Aufgabe 15:

Bei einem Gedächtnisexperiment werden 40 Probanden 30 Gegenstände vorgelegt, die sie hinterher auswendig niederzuschreiben haben. Die folgende Aufzählung listet auf, an wie viele der Gegenstände sich jeder einzelne Proband erinnert hat:

12	20	23	0	14	16	12	10	30	12
14	9	6	22	14	29	1	10	11	22
15	16	12	13	15	17	2	14	22	9
11	14	18	19	20	6	8	10	12	14

a) Welches Skalenniveau liegt vor (Anzahl erinnerte Gegenstände)?

b) Erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle.

c) Wie viel Prozent der Probanden haben sich an 20 oder weniger Gegenstände erinnert?

Lösung:

a) metrische Skala

b)

Anzahl	Abs. H.	Rel. H.	Abs. SH	Rel. SH
0	1	2,5%	1	2,5%
1	1	2,5%	2	5,0%
2	1	2,5%	3	7,5%
6	2	5,0%	5	12,5%
8	1	2,5%	6	15,0%
9	2	5,0%	8	20,0%
10	3	7,5%	11	27,5%
11	2	5%	13	32,5%
12	5	12,5%	18	45,0%
13	1	2,5%	19	47,5%
14	6	15%	25	62,5%

15	2	5,0%	27	67,5%
16	2	5,0%	29	72,5%
17	1	2,5%	30	75,0%
18	1	2,5%	31	77,5%
19	1	2,5%	32	80,0%
20	2	5,0%	34	85,0%
22	3	7,5%	37	92,5%
23	1	2,5%	38	95,0%
29	1	2,5%	39	97,5%
30	1	2,5%	40	100,0%
	40	100,00%		

c) 85%

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 16:

Geben Sie für die Merkmale

a) Einkommen

b) Haarfarbe

c) Körperlänge

d) Anzahl der Personen in einem ICE

an, ob sie stetig oder diskret sind.

Lösung:

a) Einkommen - diskret

b) Zahl der Kontobewegungen auf dem Girokonto - diskret

c) Körperlänge -stetig

d) Anzahl der Personen in einem ICE - diskret

Aufgabe 17:

In der folgenden Tabelle sind 60 Preise für den Kraftstoff Diesel. Diese Werte wurden an 60 verschiedenen Tankstellen zur gleichen Zeit an verschiedenen Orten ermittelt.

Tankstellen nummer	Preis in €	Tankstellen nummer	Preis in €	Tankstellen nummer	Preis in €	Tankstellen nummer	Preis in €
1	1,16	16	1,17	31	1,12	46	1,09
2	1,15	17	1,18	32	1,13	47	1,11
3	1,14	18	1,19	33	1,14	48	1,11
4	1,09	19	1,22	34	1,15	49	1,12
5	1,15	20	1,21	35	1,16	50	1,13
6	1,08	21	1,11	36	1,17	51	1,14
7	1,21	22	1,23	37	1,18	52	1,15
8	1,22	23	1,24	38	1,19	53	1,16
9	1,23	24	1,09	39	1,09	54	1,21
10	1,33	25	1,26	40	1,21	55	1,18
11	1,18	26	1,04	41	1,22	56	1,19
12	1,17	27	1,28	42	1,23	57	1,16
13	1,16	28	1,29	43	1,24	58	1,21
14	1,17	29	1,29	44	1,25	59	1,22
15	1,12	30	1,31	45	1,26	60	1,23

Berechnen Sie die relative kumulierte Häufigkeit für folgende Aussage:

Der Spritpreis betrug höchstens 1,15 Euro.

Lösung:

$$\frac{21}{60}$$

Aufgabe 18:

In der folgenden Tabelle sind die Fehlzeiten von den 50 Mitarbeitern der Backplasa AG des letzten Jahres aufgelistet.

Fehlzeit in Tage	0	3	5	9	12	18	21
Anzahl der MA	5	9	13	9	8	4	2

Erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle. In dieser Häufigkeitstabelle soll die absolute Häufigkeit, die relative Häufigkeit, die absolute kumulierte Häufigkeit und die relative kumulierte Häufigkeit.

Lösung:

Fehltage	Abs.H.	Rel. H.	Abs. k. H.	Rel. K. H.
0	5	10%	5	10%
3	9	18%	14	28%
5	13	26%	27	54%
9	9	18%	36	72%
12	8	16%	44	88%
18	4	8%	48	96%
21	2	4%	50	100%

Aufgabe 19:

In der folgenden Tabelle sind die Fehlzeiten von den 50 Mitarbeitern der Backplasa AG des letzten Jahres aufgelistet.

Fehlzeit in Tage	0	3	5	9	12	18	21
Anzahl der MA	5	9	13	9	8	4	2

Wie groß ist der Anteil der Arbeitnehmer zu der Aussage „Die Fehlzeit ist fünf Tage oder weniger“. Geben Sie das Ergebnis als Prozentzahl an.

Lösung:

Fehltage	Abs.H.	Rel. H.	Abs. k. H.	Rel. K. H.
0	5	10%	5	10%
3	9	18%	14	28%
5	13	26%	27	**54%**
9	9	18%	36	72%
12	8	16%	44	88%
18	4	8%	48	96%
21	2	4%	50	100%

Aufgabe 20:

In der folgenden Tabelle sind die Fehlzeiten von den 50 Mitarbeitern der Backplasa AG des letzten Jahres aufgelistet.

Fehlzeit in Tage	0	3	5	9	12	18	21
Anzahl der MA	5	9	13	9	8	4	2

Welcher Anteil der gesamten Fehlzeit entfällt auf die oberen (kränksten) acht Mitarbeiter?

Lösung:

$2 \cdot 21 + 4 \cdot 18 + 2 \cdot 12 = 138 \text{ Tage}$

$\text{Gesamt} = 3 \cdot 9 + 5 \cdot 13 + 9 \cdot 9 + 12 \cdot 8 + 18 \cdot 4 + 21 \cdot 2 = 383 \text{ Tage}$

$$\frac{138 \text{ Tage}}{383 \text{ Tage}} = 0{,}3603 = 36{,}03\%$$

Aufgabe 21:

Welche der Merkmale A bis E sind bei beliebig genauer Messung stetig? (mehrere Antworten können richtig sein)

A Erlernter Beruf

B Gründe für die Wahl einer bestimmten Partei

C Einwohnerzahl einer Stadt

D Stromverbrauch in kWh

E Körpergröße

Lösung:

Aufgabe 1 E und D sind richtig.

Zu A: Das Merkmal "Erlernter Beruf" ist diskret (d.h. nicht stetig). Ordnet man nämlich jeder Merkmalsausprägung (d.h. jedem möglichen erlernten Beruf) **eine** reelle Zahl zu, wobei jeweils zwei der Merkmalsausprägungen auf zwei **verschiedene** Zahlen abgebildet werden, so gibt es zwischen je zwei der Zahlen, auf die die Abbildung erfolgt, weitere reelle Zahlen, auf die nicht abgebildet wird. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß es nur **endlich** viele mögliche Berufe gibt, während die Menge der reellen Zahlen **unendlich** groß ist. Darüber hinaus existieren zwischen zwei beliebigen reellen Zahlen **unendlich** viele andere reelle Zahlen.

Zu B: Das Merkmal "Gründe für die Wahl einer bestimmten Partei" ist diskret, weil es nur endlich viele verschiedene Gründe für eine solche Wahl gibt. Die Ausführungen zu A gelten auch hier.

Zu C: Das Merkmal "Einwohnerzahl einer Stadt" ist **diskret**, weil es beispielsweise keine Bruchteile eines Einwohners gibt. Der Wertebereich der Merkmalsausprägungen ist in diesem Fall durch die natürlichen Zahlen einschließlich 0 gegeben; zwischen zwei Merkmalsausprägungen gibt es folglich unendlich viele reelle Zahlen.

Zu D: Würde der Stromverbrauch beliebig genau gemessen, so kämen **alle** positiven **reellen** Zahlen einschließlich 0 dafür als Wertebereich in Frage. Folglich gäbe es keine Zahlen zwischen zwei Merkmalsausprägungen, die keine Merkmalsausprägungen wären, d.h. der Stromverbrauch wäre in diesem Fall ein **stetiges** Merkmal.

Zu E: Falls die Körpergröße beliebig genau gemessen wird, handelt es sich um ein stetiges Merkmal. Die Ausführungen zu D gelten auch hier.

Aufgabe 22:

Eine ländliche Postfiliale führt folgende Untersuchung durch: An einem Tag werden die am Schalter abgefertigten Kunden in einer Strichliste erfasst. Alle zehn Minuten beginnt der Mitarbeiter dabei eine neue Zeile; kommt zehn Minuten lang gar kein Kunde, schreibt er eine 0 in die Zeile. Nach Schalterschließung ergibt sich durch Auszählen der Striche, wie viele Kunden in den 30 Zehn-Minuten-Intervallen der Öffnungszeit bedient wurden. Dies ist das Ergebnis:

0	1	0	2	2	1	0	3	1	2
1	0	1	2	1	0	3	3	1	5
2	0	1	1	3	2	2	0	3	5

Erstellen Sie eine tabellarische Übersicht mit den absoluten und relativen Häufigkeiten sowie den absoluten und relativen Summenhäufigkeiten der bedienten Kunden.

Lösung:

xi	ni	hi	Ni	Hi
0	7	0,23	7	0,23
1	9	0,30	16	0,53
2	7	0,23	23	0,76
3	5	0,17	28	0,93
4	0	0,00	28	0,00
5	2	0,07	30	1,00
	30			

Aufgabe 23:

Die Arbeitsbelastung der Feuerwehr in zwei Städten Adorf und Bdorf soll miteinander verglichen werden. In der folgenden Häufigkeitstabelle ist für die Zahl der täglichen Einsätze über einen bestimmten Zeitraum für beide Städte aufgeführt.

Zahl der Einsätze	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Summe**
Anzahl von Tagen: A	51	32	28	51	29	25	21	237
Anzahl von Tagen: B	9	29	21	35	35	18	14	161

Bei welchen der beiden Feuerwehren ist die relative Häufigkeit für drei Einsätze pro Tag grösser. Berechnen Sie dazu beide relativen Häufigkeiten.

Lösung:

Zahl der Einsätze	0	1	2	3	4	5	6	Summe
Anzahl von Tagen: A	51	32	28	51	29	25	21	237
Anzahl von Tagen: B	9	29	21	35	35	18	14	161
Prozentual A	21,52%	13,50%	11,81%	21,52%	12,24%	10,55%	8,86%	100,00%
Prozentual B	5,59%	18,01%	13,04%	21,74%	21,74%	11,18%	8,70%	100,00%
Prozentual A	21,52%	35,02%	46,84%	68,35%	80,59%	91,14%	100,00%	
Prozentual B	5,59%	23,60%	36,65%	58,39%	80,12%	91,30%	100,00%	

Aufgabe 24:

Bei der letzten Statistikklausur ergaben sich für die Studenten des Studiengangs Energietechnik folgende Punktezahlen:

12	18	3	25	26	18	18
29	26	22	25	3	18	12
5	12	15	15	14	7	17

Wie viel Prozent der Studenten haben 25 und mehr Punkte erreicht?

Lösung:

100%-76,2%=23,8%

		rel. H.	rel. SH.
1	0	0,00%	0,00%
2	0	0,00%	0,00%
3	2	9,52%	9,52%
4	0	0,00%	9,52%
5	1	4,76%	14,29%
6	0	0,00%	14,29%
7	1	4,76%	19,05%
8	0	0,00%	19,05%
9	0	0,00%	19,05%
10	0	0,00%	19,05%
11	0	0,00%	19,05%
12	3	14,29%	33,33%
13	0	0,00%	33,33%
14	1	4,76%	38,10%
15	2	9,52%	47,62%
16	0	0,00%	47,62%
17	1	4,76%	52,38%
18	4	19,05%	71,43%
19	0	0,00%	71,43%
20	0	0,00%	71,43%
21	0	0,00%	71,43%
22	1	4,76%	76,19%
23	0	0,00%	76,19%
24	0	0,00%	76,19%
25	2	9,52%	85,71%
26	2	9,52%	95,24%
27	0	0,00%	95,24%
28	0	0,00%	95,24%
29	1	4,76%	100,00%
Summe	21		

100%-76,19%=23,81%

Aufgabe 25:

Es liegen Ihnen die Gewichtsangaben (in Kg) von 60 Personen vor:

65	65	66	73	79	83	73	69	69	89
88	88	67	74	80	84	74	70	70	90
81	67	68	75	81	85	75	71	71	73
82	68	69	76	82	86	76	77	73	74
70	70	70	77	83	87	77	67	82	75
72	72	78	78	84	79	80	79	75	86

Erstellen Sie für diese Gewichtsangaben eine Häufigkeitstabelle. Diese Häufigkeitstabelle sollte die relative Häufigkeit und die absolute kumulierte Häufigkeit enthalten.

Lösung:

Gew.	abs. H	rel. H.	abs. SH.	rel. SH.
65	2	3%	2	3%
66	1	2%	3	5%
67	3	5%	6	10%
68	2	3%	8	13%
69	3	5%	11	18%
70	5	8%	16	27%
71	2	3%	18	30%
72	2	3%	20	33%
73	4	7%	24	40%
74	3	5%	27	45%
75	4	7%	31	52%
76	2	3%	33	55%
77	3	5%	36	60%
78	2	3%	38	63%
79	3	5%	41	68%
80	2	3%	43	72%
81	2	3%	45	75%
82	3	5%	48	80%
83	2	3%	50	83%
84	2	3%	52	87%
85	1	2%	53	88%
86	2	3%	55	92%
87	1	2%	56	93%
88	2	3%	58	97%
89	1	2%	59	98%
90	1	2%	60	100%
Summe	60	100%		

Lagemaße

Aufgabe 26:

Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

1) Der Mittelwert wird wesentlich stärker von Ausreißern beeinflusst als der Median.

Der Mittelwert wird von Ausreißern stark beeinflusst, während Ausreißer bei der Berechnung des Medians kaum eine Rolle spielen.

Die Aussage ist also **nicht** falsch.

2) Die Berechnung des Mittelwerts setzt ein quantitatives Merkmal voraus.

Generell können bei quantitativen Merkmalen der Mittelwert und der Median als Lagemaße berechnet werden.

Die Aussage in Antwort B ist also **nicht** falsch.

3) Der Mittelwert und der Median sind Lagemaße.

Generell können bei quantitativen Merkmalen der Mittelwert und der Median als Lagemaße berechnet werden.

Die Aussage in Antwort C ist also **nicht** falsch.

4) Bei schiefen Verteilungen weichen der Mittelwert und der Median voneinander ab.

Wenn diese beiden Maße voneinander abweichen, **ist** die Stichprobenverteilung schief.

Die Aussage in Antwort D ist also **nicht** falsch.

5) Wenn die Berechnung des Medians erlaubt ist, kann auch der Mittelwert berechnet werden.

Bei ordinalskalierten Merkmalen kann der Median berechnet werden, der Mittelwert dagegen **nicht**.

Aufgabe 27:

Welche der folgenden Aussagen, bezüglich der Eigenschaften des Medians, ist richtig? (In der Grundgesamtheit sind mehr als 2 Werte enthalten)

1) Der Median bleibt in jedem Fall unverändert, wenn alle Werte außerhalb des Intervalls $\overline{x} \pm 2s$ aus der Stichprobe entfernt werden.

Wenn man einen oder mehrere Werte aus der Stichprobe entfernt, ändert sich deren Umfang und damit eventuell auch der Median.

2) Der Median bleibt in jedem Fall unverändert, wenn zum größten Wert eine positive Zahl addiert wird.

Ganz genau. Die Aussage in Antwort B ist richtig, denn addiert man zum größten Wert eine positive Zahl, bleibt dies der größte Wert. Die Rangzahlen und der Median ändern sich dadurch nicht.

3) Der Median bleibt in jedem Fall unverändert, wenn alle Werte mit der gleichen Zahl multipliziert werden.

Nein, das ist sie **nicht**.

Wenn man alle Werte mit der gleichen Zahl multipliziert, ändert sich der Median in der gleichen Weise (obgleich dessen Rang unverändert bleibt).

4) Der Median bleibt in jedem Fall unverändert, wenn zu allen Werten eine Konstante addiert wird.

Nein, diese Aussage ist falsch.

Wenn man zu allen Werten eine Zahl addiert, ändert sich der Median in der gleichen Weise (obgleich dessen Rang unverändert bleibt).

5) Der Median bleibt in jedem Fall unverändert, wenn man einen Ausreißer weglässt

Die Aussage in Antwort E ist falsch.

Wenn man einen oder mehrere Werte aus der Stichprobe entfernt, ändert sich deren Umfang und damit eventuell auch der Median.

Aufgabe 28:

Beantworten Sie die Frage jeweils nur mit ja oder nein.

Zu den Daten 18, 13, 16, 13, 19, 12 ist der Median kleiner als der arithmetische Mittelwert.

JA

Zu den Daten 18, 13, 16, 13, 19, 12 ist der Modalwert kleiner als der arithmetische Mittelwert.

JA

Zu den Daten 18, 13, 16, 12, 19, 19 ist der arithmetische Mittelwert kleiner als der Modalwert.

JA

Zu den Daten 19, 18, 19, 12, 12, ist der arithmetische Mittelwert kleiner als der Median.

JA

Zu den Daten 18, 13, 16, 12, 19, 19, 19 ist der Median kleiner als der Modalwert.

JA

Zu den Daten 18, 13, 16, 13, 19, 12, 22 ist der Modalwert kleiner als der Median.

JA

Zu den Daten 188, 130, 160, 121, 190, 190 ist der arithmetische Mittelwert kleiner als der Modalwert.

JA

Aufgabe 29:

Für die Stadt Mosburg wurden die durchschnittlichen Monatstemperaturen der Sommermonate jeden Jahres ermittelt.

	1995	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
Juni	15,0 °C	15,6 °C	17,1 °C	17,2 °C	17,6 °C
Juli	20,9 °C	16,0 °C	18,1 °C	16,8 °C	17,8 °C
August	19,2 °C	18,0 °C	21,0 °C	17,1 °C	18,5 °C

Fragen:

In welchem Jahr war die Durchschnittstemperatur aller drei Monate am höchsten? (1997)

In welchem Jahr war die Durchschnittstemperatur aller drei Monate am geringsten? (1996)

Lösung:

Summe	55,1	49,6	56,2	51,1	53,9
Mittelwert	18,4	16,5	18,7	17,0	18,0
		am niedrigsten	am höchsten		

Aufgabe 30:

Ein Hersteller von Glühlampen behauptet in einem Werbespot, dass die von ihm produzierten Glühlampen eine durchschnittliche Lebensdauer von 1450 Stunden haben. In einem Test wurden für zehn wahllos herausgegriffene Glühlampen folgende Lebensdauern ermittelt:

2039 h; 1510 h; 1786 h; 1456 h; 922 h; 1294 h; 1509 h; 1555 h; 657 h; 1594 h.

Was meinen Sie zu dieser Werbung?

Lösung:

$$\bar{x} = \frac{2039+1510+1786+1456+922+1294+1509+1555+657+1594}{10} = \frac{14322}{10} = 1432{,}2$$

Runde 2% Abweichung bei einer kleinen Stichprobe ist akzeptabel.

Aufgabe 31:

Die Punktzahlen, die ein Student bei sechs Klausuren erreichte, waren 84, 91, 72, 68, 87 und 78.
a) Man bestimme das arithmetische Mittel der Punktzahl. (80)

b) Man bestimme den Median der Punktzahlen (81)

Lösung:

a) $\overline{x} = \frac{84+91+72+68+87+78}{6} = \frac{480}{6} = 80$

b) Die Reihe geordnet: 68,72,78,84,87,91

Da die Anzahl der Werte gerade ist, gibt es zwei Werte in der Mitte, 78 und 84, deren Mittelwert $= \frac{1}{2}(78+84) = 81$

Aufgabe 32:

Man bestimme den Mittelwert, den Median und den Modus der Zahlenmenge: 3,5,2,6,5,9,5,2,8,6. (5,1; 5; 5)

Lösung:

Die Reihe geordnet: 2,2,3,5,5,5,6,6,8,9

Arithmetisches Mittel:

$$\overline{x} = \frac{3+5+2+6+5+9+5+2+8+6}{10} = 5{,}1$$

Median:

$$Median = \frac{1}{2}(5+5) = 5$$

Modus: 5 (die am häufigsten vorkommende Zahl)

Aufgabe 33:

Man bestimme das geometrische Mittel (6,43) und das arithmetische Mittel (7) der Zahlen 3,5,6,6,7,10,12

Lösung:

Geometrisches Mittel:

$$\overline{x}_g = \sqrt[7]{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 12} = \sqrt[7]{453.600} = 6{,}43$$

Arithmetische Mittel:

$$\overline{x} = \frac{3+5+6+6+7+10+12}{7} = 7$$

Aufgabe 34:

Man bestimme das harmonische Mittel der Zahlen 3,5,6,6,7,10,12. (5,87)

Lösung:

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{7}{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)} =$$

$$\bar{x}_h = \frac{7}{\left(\frac{140+84+70+70+60+42+35}{420}\right)} = \frac{2940}{501} = 5{,}87$$

Aufgabe 35:

Wenn die Abschlussklausur einer Vorlesung dreimal so hoch gewertet wird wie eine Kurzklausur und ein Student bei der Abschlussklausur eine Punktzahl vom 85 und bei den Kurzklausuren Punktezahlen von 70 und 90 erhalten hat. Wie hoch ist die durchschnittliche Punktzahl? (83)

Lösung:

Die Lösung erfolgt über gewogenes (gewichtetes) arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 70 + 1\cdot 90 + 3\cdot 85}{1+1+3} = \frac{415}{5} = 83$$

Aufgabe 36:

Berechnen Sie das arithmetische Mittel folgender Stichprobenwerte.

2,3,6,5,2,8,7,2,4,3,1,3,0 (3,54)

Lösung:

$$\bar{x} = \frac{1}{13}\cdot(2+3+6+5+2+8+7+2+4+3+1+3+0) = 3{,}54$$

Aufgabe 37:

Bei einem Versuch mit Sommerweizen erzielte man folgende Körnererträge pro Parzelle (auf 10g genau gemessen):

640, 530, 700, 850, 950, 710, 780, 670, 730, 820, 740, 770.

Berechnen Sie für den Körnerertrag:

a) das arithmetische Mittel $\bar{x}$ (740,83),

b) den Median x_{Med} (735).

Lösung:

(a) $\bar{x} = \dfrac{640+530+700+850+950+710+780+670+730+820+740+770}{12} = 740{,}83$

(b) 530 640 670 700 710 **730** **740** 770 780 820 850 950

$\tilde{x} = \dfrac{730+740}{2} = 735$

Aufgabe 38:

Ein Wanderer legte einen Weg von zwei Kilometern Länge zurück. Den ersten Kilometer ging er mit einer Geschwindigkeit von 6 km pro Stunde, den zweiten mit einer solchen von 4 km pro Stunde. Wie groß war seine Durchschnittsgeschwindigkeit? (4,8)

Lösung:

$v = \dfrac{s}{t}$

v: Geschwindigkeit; s: Weg; t=Zeit

$\text{Durchschnittsgeschwindigkeit} = \dfrac{\text{Gesamtweg}}{\text{Gesamtzeit}}$

$\mathrm{s_{gesamt}} = 1\text{ km} + 1\text{ km} = 2\text{ km}$

$t_{gesamt} = \dfrac{1\,km}{6\dfrac{km}{h}} + \dfrac{1\,km}{4\dfrac{km}{h}} = \dfrac{2+3}{12}h = \dfrac{5}{12}h$

$\bar{v} = \dfrac{2\,km}{\dfrac{5}{12}h} = \dfrac{24\,km}{5h} = 4{,}8\dfrac{km}{h}$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Wanderers beträgt v=4,8 km/h.

Aufgabe 39:

Erwin besucht seine Großmutter väterlicherseits und nimmt als Geschenk natürlich Apfelsinen mit. Die ersten 15 km der Strecke fährt er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 45 km/h, auf den nächsten 25 km kann er im Durchschnitt 100 km/h fahren und auf den letzten 20 km kommt er auf 40 km/h im Durchschnitt.

Wie groß ist die Durchschnittsgeschwindigkeit? (55,38)

Lösung:

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist nicht etwa ein Drittel der Summe der drei Durchschnitte.

Erwin braucht für die erste Teilstrecke 20 Minuten, für die zweite 15 Minuten und für die dritte 30 Minuten. Er ist also insgesamt 65 Minuten (1,083 Stunden) unterwegs. Er legt insgesamt 60 km zurück.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist:

$$\bar{v} = \frac{60\ km}{1{,}083\ h} = 55{,}38 \frac{km}{h}$$

Das Ergebnis erhält man auch mit dem gewichteten harmonischen Mittel.

$$\overline{x_h} = \frac{15 + 25 + 20}{\frac{15}{45} + \frac{25}{100} + \frac{20}{40}} = 55{,}38$$

Die Summanden im Nenner entsprechen den Fahrzeiten für die einzelnen Teilstrecken, die Summanden im Zähler entsprechen den einzelnen Teilstrecken. So ergibt sich insgesamt die Durchschnittsgeschwindigkeit.

Aufgabe 40:

Bestimmen Sie aus der folgenden Urliste (Pulsmessung) den Modalwert und Median. (-; 68,5)

Berechnen Sie die durchschnittliche Pulsfrequenz aller Schüler und vergleichen Sie diese mit dem Median der Urliste. (69,1)

Pulsfrequenz von 32 Schülern:

64	65	70	80	88	58	60	68	63	64	57	77	74	73	62	52
72	84	63	90	68	59	58	71	80	82	81	69	53	65	69	71

Lösung:

Geordnete Liste:

Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Wert	**52**	**53**	**57**	**58**	**58**	**59**	**60**	**62**	**63**	**63**	**64**	**64**	**65**	**65**	**68**	**68**
Nummer	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Wert	**69**	**69**	**70**	**71**	**71**	**72**	**73**	**74**	**77**	**80**	**80**	**81**	**82**	**84**	**88**	**90**

Anzahl der Werte ist gerade (n=32); Median:

$$x_{Med} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}(x_{16} + x_{17}) = \frac{1}{2}(68 + 69) = 68{,}5$$

Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{1}{32} \cdot 2210 = 69{,}1$$

Einen eindeutigen Modus gibt es in diesem Beispiel nicht. Es gibt mehrere Merkmalsausprägungen mit der Häufigkeit 2 aber keine die darüber liegt.

Aufgabe 41:

Die 32 Schüler einer Klasse haben ein Durchschnittsgewicht von 74 kg.

Nach langer Krankheit hat ein Schüler 24 kg abgenommen.

a) Um wie viel ändert sich der Mittelwert? (73,25)

b) Wie ändert sich der Mittelwert, wenn sich bei einer Datenreihe mit n Elementen ein Datenwert um a vergrößert, bzw. verkleinert? (± a/n)

Lösung:

a) Rechnung erfolgt ohne Einheit kg

$$74 = \frac{1}{32}\sum_{i=1}^{32} x_i \quad \text{alter Mittelwert } \bar{x}_{alt} \;|\cdot 32$$

$$\Leftrightarrow \quad 74 \cdot 32 = \sum_{i=1}^{32} x_i \quad \text{Summe der Gewichte alt, es erfolgt eine Abnahme um 24}$$

$$\Leftrightarrow \quad 74 \cdot 32 - 24 = \sum_{i=1}^{32} x_i \quad \text{Summe der Gewichte neu} \quad |:32$$

$$\Leftrightarrow \quad 74 - \frac{24}{32} = \frac{1}{32}\sum_{i=1}^{32} x_i = \bar{x}_{neu} \quad \text{neuer Mittelwert}$$

Der Mittelwert nimmt um $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ ab, er beträgt nun $\underline{\underline{73{,}25 \text{ kg}}}$

b) Rechnung erfolgt ohne Einheit kg

$$\bar{x}_{alt} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{alter Mittelwert } \bar{x}_{alt} \;|\cdot n$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{x}_{alt} \cdot n = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{Summe alt, es erfolgt eine Änderung um } \pm a$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{x}_{alt} \cdot n \pm a = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{Summe neu} \quad |:n$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{x}_{alt} \pm \frac{a}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}_{neu} \quad \text{neuer Mittelwert}$$

Der Mittelwert ändert sich um $\pm\frac{a}{n}$ er beträgt $\underline{\underline{\bar{x}_{neu} = \bar{x}_{alt} \pm \frac{a}{n}}}$

Aufgabe 42:

In einem Unternehmen sind 10 Frauen in einer Putzkolonne auf 325 € - Basis beschäftigt. Der Chef stellt einen Vorarbeiter ein, der 2800 € pro Monat verdienen soll.

Welche Auswirkungen ergeben sich dadurch auf den Modalwert, dem Median und das arithmetische Mittel der Monatseinkommen aller Mitarbeiter?

Lösung:

Der Modus ist der Wert, der am häufigsten vorkommt, das sind die 325 € mit der absoluten Häufigkeit 10. Er bleibt unverändert.

Auch der Median bleibt unverändert, die 2800 € liegen weit außerhalb der Mitte.

Der Mittelwert ändert sich von 325 € auf (3250€ + 2800 €) / 11 = 550 €

Aufgabe 43:

Dreizehn Studenten geben ihre monatlichen Ausgaben in € wie folgt an:

Studenten	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Einkommen	700	800	900	1200	1400	1500	200	750	800	3000	950	1300	1450

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel (1150), den Median (950) und den Modalwert (800). Interpretieren Sie diese Merkmale inhaltlich.

b) Erklären Sie, warum sich die Lagemaße unterscheiden.

c) Welche Maßzahl charakterisiert Ihrer Meinung nach die Stichprobe am besten?

Lösung:

a)

arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\bar{x} = \frac{1}{13}(1300 + 1200 + 1400 + 700 + 200 + 750 + 1450 + 1500 + 800 + 800 + 950 + 900 + 3000) = 1150$

Die durchschnittlichen Ausgaben betragen $\underline{\underline{\bar{x} = 1150\ €}}$

Median: Die Daten werden nach der Größe sortiert:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}
200	700	750	800	800	900	950	1200	1300	1400	1450	1500	3000

$n = 13$ ist ungerade $\Rightarrow x_{Med} = x_{\frac{n+1}{2}} = x_7 = 950$

Der Median bildet das Zentrum der geordneten Daten (Ausgaben) $\underline{\underline{x_{Med} = 950\ €}}$

Der Modus ist der Wert mit der größten Häufigkeit: $\underline{\underline{x_{Mod} = 800\ €}}$ (Häufigkeit = 2)

b) Die Lagemaße unterscheiden sich voneinander, weil die Ausgaben ungleich verteilt sind (Ausreißer 3000 €).

c) Der Median charakterisiert die Stichprobe am besten, da er gegen Ausreißer unempfindlich ist.

Aufgabe 44:

Student Sauerbrot ist der Meinung, dass ihm das Studentenleben zu gut bekommt und möchte etwas gegen seinen deutlich sichtbaren Bauch tun. Zu diesem Zweck beschließt er, jeden Tag eine Stunde Fahrrad zu fahren. In der ersten Woche schafft er folgende Strecken (in km):

15; 16,5; 17,5; 18; 18; 20; 22

a) Sauerbrot möchte wissen, welche Geschwindigkeit er im Schnitt geschafft hat und berechnet das arithmetische Mittel (Wert?).

b) Sein Bruder glaubt dagegen, man müsse bei einer solchen Fragestellung das harmonische Mittel berechnen (Wert?).

c) Wer von beiden hat Recht?

d) Um wie viel Prozent hat S seine Kilometerleistung im Schnitt gesteigert?

Lösung:

Tag	1	2	3	4	5	6	7
km	15	16,5	17,5	18	18	20	22

a)

$$\text{Arithmetisches Mittel} = \frac{15 + 16{,}5 + 17{,}5 + 18 + 18 + 20 + 22}{7} = \frac{127}{7} = 18{,}1429$$

b)

$$\text{Harmonisches Mittel} = \frac{7}{\frac{1}{15} + \frac{1}{16{,}5} + \frac{1}{17{,}5} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{22}} = \frac{7}{0{,}39098124} = 17{,}9037$$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit erhält man als Quotienten aus

Gesamtstrecke (km) / Gesamtzeit (h)

Korrekt ist also die Anwendung des **arithmetischen Mittels**.

c)

Die Durchschnittsgeschwindigkeit erhält man als Quotienten aus

Gesamtstrecke (km) / Gesamtzeit (h)

Korrekt ist also die Anwendung des **arithmetischen Mittels**.

Das harmonische Mittel wäre korrekt gewesen, wenn die Aufgabenstellung gelautet hätte: S beschließt, jeden Tag **einen Kilometer** Fahrrad zu fahren. Am ersten Tag schafft er den Kilometer mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 15 km/h, am zweiten mit 16,5 km/h usw. …

d).

Tag	1	2	3	4	5	6	7
km	15	16,5	17,5	18	18	20	22

Berechnung der durchschnittlichen Leistungssteigerung:

→ geometrisches Mittel der Wachstumsfaktoren!

	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7
Leistungssteigerung	10,00%	6,06%	2,86%	0,00%	11,11%	10,00%
Wachstumsfaktor	1,1	1,06060606	1,02857143	1	1,11111111	1,1

Durchschnittlicher Wachstumsfaktor:

$$= \sqrt[6]{1{,}1 \cdot 1{,}\overline{06} \cdot 1{,}02857143 \cdot 1 \cdot 1{,}\overline{1} \cdot 1{,}1} = 1{,}0659$$

Durchschnittliche Wachstumsrate:

$$= 1{,}0659 - 1 = \mathbf{6{,}59\%}$$

Aufgabe 45:

Ein Botendienst bringt jeden Tag Post von der Betriebszentrale zu einer bestimmten Filiale.

Der Fahrer notierte an zehn Tagen die benötigte Zeit in Minuten:

32, 27, 29, 25, 34, 28, 36, 30, 32, 39

a.) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Fahrzeiten. (31,2)

b.) Berechnen Sie den Median der Fahrzeiten. (31)

Lösung:

a) 31,2

b) 31

Aufgabe 46:

Der Umsatz eines Unternehmens entwickelte sich in den Jahren 2001 bis 2004 jeweils mit folgenden jährlichen Veränderungsraten:

t	2001	2002	2003	2004
r	8%	15%	-4%	12%

Berechnen Sie den durchschnittlichen jährlichen Wachstumsfaktor. (7,5%)

Lösung:

$$x_{geo} = \sqrt[4]{1{,}08 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}96 \cdot 1{,}12} = 1{,}075$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 47:

Unter Kunden der Fastfood-Kette Noodle-Box wurde ermittelt, welche Größe die Kunden für den Nudel-Burger wählen. Dabei ergab sich folgendes Ergebnis:

Größe des Nudel-Burgers	Klein	Mittel	groß	XXL
Anzahl der gekauften	25	85	140	50

Geben Sie als Zusammenfassung ein sinnvolles Lagemaß an.

Lösung:

Einzig sinnvolles Lagemaß ist der Modus.

Groß wurde am häufigsten gewählt.

Aufgabe 48:

Dreizehn Studenten geben ihre monatlichen Ausgaben in € wie folgt an:

| 1300 | 1200 | 1400 | 700 | 200 | 750 | 1450 | 1500 | 800 | 800 | 950 | 900 | 3000 |

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel, den Median und den Modalwert.

b) Welche Maßzahl charakterisiert Ihrer Meinung nach die Stichprobe am besten?

Lösung:

a)

200			
700		**arithm. Mittel:**	**1150**
750		**Median:**	**950**
800		**Modus:**	**800**
800			
900			
950			
1200			
1300			
1400			
1450			
1500			
3000			

b)

Der Median charakterisiert die Stichprobe am besten.

Aufgabe 49:

Der Kontostand des Studenten Daniel Knalle entwickelte sich in den letzten Jahren wie folgt (alle Beträge auf € umgerechnet).

Jahre	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Kontostand	1000	1054	1111	1170	1234	1300

Berechnen Sie die durchschnittliche Wachstumsrate auf vier Nachkommastellen.

Lösung:

Jahre¤	2008¤	2009¤	2010¤	2011¤	2012¤	2013¤	¤
Kontostand¤	1000¤	1054¤	1111¤	1170¤	1234¤	1300¤	¤
Prozentuales¶ Wachstum¤	¤	0,0540¤	0,0541¤	0,05310¤	0,0547¤	0,0535¤	¤

¶

$$\bar{x}_{geo} = \sqrt[5]{0{,}0540 \cdot 0{,}0541 \cdot 0{,}05310 \cdot 0{,}0547 \cdot 0{,}0535} = 0{,}0539$$

Aufgabe 50:

Gegeben sind die Inflationsraten gegenüber dem jeweiligen Vorjahr aus acht aufeinander folgenden Jahren.

Jahr	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**t_4**	**t_5**	**t_6**	**t_7**	**t_8**
Inflation gegenüber Vorjahr in %	0,2%	1,3%	2,8%	2,7%	3,5%	4,0%	4,2%	3,0%

Ermitteln Sie die durchschnittliche Inflationsrate in Prozent!

Lösung:

$$x_{geo} = \sqrt[8]{1{,}002 \cdot 1{,}013 \cdot 1{,}028 \cdot 1{,}027 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}042 \cdot 1{,}03} = 1{,}0270 = 2{,}70\%$$

Aufgabe 51:

In der folgenden Tabelle sind die Fehlzeiten von den 50 Mitarbeitern der Backplasa AG des letzten Jahres aufgelistet.

Fehlzeit in Tage	0	3	5	9	12	18	21
Anzahl der MA	5	9	13	9	8	4	2

Berechnen Sie das arithmetische Mittel, den Median und den Modus.

Wenn Sie diese drei Maße vergleichen, was können Sie daraus schließen?

Lösung:

Arithmetisches Mittel:

$$\overline{\mathrm{x}} = \frac{1}{50} \cdot 383 = 7{,}66$$

Median (Gerade Anzahl von Werten):

$$\mathrm{x}_{\mathrm{Med}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{x}_{\frac{n}{2}} + \mathrm{x}_{\frac{n}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}(5+5) = 5$$

Modus:

$$x_{Mod} = 5$$

Durch den höheren Wert des arithmetischen Mittels, kann man auf Ausreißer schließen.

Streumaße

Aufgabe 52:

Beantworten Sie die Frage nur mit ja oder nein.

Die Standardabweichung einer Zufallsgröße kann nicht negativ sein.

Lösung:

JA

Aufgabe 53:

Nach einer Vordiplomprüfung werden die Noten eines erfahrenen Prüfers mit denen eines unerfahrenen Prüfers verglichen. Es ergaben sich die folgenden Noten:

Erfahrener	
2	3
1	2
4	1
5	1
1	
4	

Unerfahrener	
2	1
3	2
3	3
2	3
2	3
3	

Untersuchen Sie, ob es in der Varianz(Standardabweichung) einen Unterschied bei den Prüfern gibt. Interpretieren Sie das Ergebnis. (1,43; 0,66)

Lösung:

Erfahrener:

$$\bar{x} = \frac{24}{10} = 2{,}4$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-2{,}4)^2 + (1-2{,}4)^2 + \ldots + (1-2{,}4)^2}{10} = \frac{20{,}40}{10} = 2{,}04$$

$$\sigma = 1{,}43$$

Unerfahrener:

$$\bar{x} = \frac{27}{11} = 2{,}45$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-2{,}45)^2 + (3-2{,}45)^2 + \ldots + (3-2{,}45)^2}{11} = 0{,}43$$

$$\sigma = 0{,}66$$

Aufgabe 54:

Es sind folgende Zahlen gegeben:

17, 45, 38, 27, 6, 48, 11, 57, 34, 22.

Bestimmen Sie die Spannweite? (51)

Lösung:

Sortieren: 6,11,17,22,27,34,38,45,48,57

Spannweite=57-6=51

Aufgabe 55:

In einer Arbeit erzielten Schüler folgende Punktzahlen:

49	53	54	56	56	57	57	59	61	62	67	69	72	72
73	73	75	75	76	78	81	81	84	85	86	88	89	90

Bestimmen Sie das untere, mittlere und obere Quartil. (57,5; 72,5; 81)

Lösung:

a) Weitere häufig verwendete Werte sind das 25%- und 75%-Perzentil, die das untere und das obere Viertel der Verteilung markieren. Man bezeichnet sie daher auch als untere und obere Quartil bzw. als erstes und drittes Quartil (der Median ist das zweite Quartil). Als Schreibweise sind Q1, Q2 und Q3 ebenso möglich wie Q25, Q50 und Q75.

Sortierung der Werte der Reihenfolge nach:

Dies ist ja bereits geschehen:

Es ist n=28 und 0,25n=7, 0,5n=14, 0,75n=21

So erhält man die Lösung durch einfaches Abzählen.

Aufgabe 56:

Gegeben sind folgende Studiendauern von Absolventen zweier Studienfächer A und B:

A: 12, 14, 9, 19, 10, 9, 11

B: 14, 11, 11, 12, 12, 11, 13, 12

a) Geben Sie jeweils die Extremwerte, die Spannweite, den Modalwert, den Median und das arithmetische Mittel an. Was lässt sich zusammenfassend über die Lage der beiden Verteilungen A und B im Vergleich sagen?

b) Berechnen Sie für A die Stichproben-Varianz und die Standardabweichung.

c) Berechnen Sie für B die Schiefe.

Lösung:

a) a)

A: Extremwerte 9 und 19; Spannweite 10; Modalwert 9; Median 11;

arithmetisches. Mittel 12

B: Extremwerte 11 und 14; Spannweite 3; Modalwert 11, 12; Median 12;

arithmetisches. Mittel 12

Die Mittelwerte stimmen überein, das liegt aber v. a. an dem „Ausreißer“ 19 in A. Bei der Berechnung des Median spielt ein solcher Ausreißer keine große Rolle, deshalb äußert sich in dem kleineren Median von A die Tatsache, dass eigentlich die Verteilung A eher links von B liegt.

b)

$$s^2 = \frac{1}{7} \cdot (2 \cdot (9-12)^2 + (10-12)^2 + (11-12)^2 + (12-12)^2 + (14-12)^2 + (19-12)^2) = \frac{1}{7} \cdot (18+4+1+0+4+49) = 10{,}86$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{10{,}86} = 3{,}30$$

c)

$$\bar{x} = \frac{14+11+11+12+12+11+13+12}{8} = 12$$

$$s^2 = \frac{3 \cdot (11-12)^2 + 3 \cdot (12-12)^2 + (13-12)^2 + (14-12)^2}{8} = \frac{3+0+1+4}{8} = 1$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s} \right)^3$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{11-12}{1} \right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{12-12}{1} \right)^3 + \left(\frac{13-12}{1} \right)^3 + \left(\frac{14-12}{1} \right)^3 \right)$$

$$= \frac{1}{8}(-1 + 0 + 1 + 8) = \frac{3}{4}$$

Aufgabe 57:

Berechnen Sie auch die Varianz und die Standardabweichung aus den folgenden Stichprobenwerten. 23, 34, 22, 41 (62,5; 7,91)

Lösung:

Arithmetischer Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{4}(23 + 34 + 22 + 41) = \frac{120}{4} = 30$$

Varianz:

$$s^2 = \frac{1}{4}((23-30)^2 + (34-30)^2 + (22-30)^2 + (41-30)^2)$$

$$= \frac{1}{4}(49 + 16 + 64 + 121) = \frac{1}{4} \cdot 250 = 62{,}5$$

Standardabweichung:

$$s = \sqrt{62{,}5} = 7{,}91$$

Aufgabe 58:

Schüler erfragen die Preise für zwei Zubehörteile für ihren Computer in verschiedenen Läden der Stadt. Die festgestellten Stückpreise lassen sich der folgenden Liste entnehmen.

Teil A (in €) x_i	4,00	4,10	5,40	4,90	3,50	3,40
Teil B (in €) x_i	11,00	11,90	14,90	10,00	12,60	9,90

a) Berechnen Sie jeweils die Standardabweichung.

b) Welcher Preis schwankt stärker?

Lösung:

$$\overline{x_A} = \frac{1}{6}(4 + 4{,}10 + 5{,}40 + 4{,}90 + 3{,}50 + 3{,}40) = \frac{25{,}3}{6} = 4{,}22$$

$$s_A = \sqrt{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} (4-4{,}22)^2 + (4{,}10-4{,}22)^2 + (5{,}40-4{,}22)^2 \\ +(4{,}90-4{,}22)^2 + (3{,}50-4{,}22)^2 + (3{,}40-4{,}22)^2 \end{pmatrix}} = 0{,}7198$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{6}(11 + 11{,}90 + 14{,}90 + 10{,}00 + 12{,}60 + 9{,}90) = \frac{25{,}3}{6} = 11{,}72$$

$$s_B = \sqrt{\frac{1}{6}\begin{pmatrix} (11-11{,}72)^2 + (11{,}90-11{,}72)^2 + (14{,}90-11{,}72)^2 \\ +(10{,}00-11{,}72)^2 + (12{,}60-11{,}72)^2 + (9{,}9-11{,}72)^2 \end{pmatrix}} = 1{,}718$$

Der Preis von Teil B schwankt mehr.

Aufgabe 59:

Zehn Frauen wurden nach ihrer Körpergröße (in cm) gefragt. Es ergaben sich folgende Nennungen.

168, 170, 161, 168, 162, 172, 164, 167, 170, 158

Berechnen oder stellen Sie folgende Größen zusammen:

Geordnete Urliste, Mittelwert (166), Median (167,5), Modus (168; 170), Varianz (18,6), Standardabweichung (4,313), Spannweite (14) und Quartile (162; 170).

Stellen Sie die Ergebnisse in einem Boxplot dar.

Lösung:

Urliste:

168, 170, 161, 168, 162, 172, 164, 167, 170, 158

Geordnete Urliste:

158, 161, 162, 164, 167, 168, 168, 170, 170, 172

Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(158 + 161 + 162 + 164 + 167 + 168 + 168 + 170 + 170 + 172) = 166$$

Median:

$$x_{Med} = \frac{1}{2}(167 + 168) = 167{,}5$$

Modus: 168 und 170

Varianz und Standardabweichung:

$$s^2 = \frac{1}{10}((158 - 166)^2 + (161 - 166)^2 + (162 - 166)^2 + (164 - 166)^2 + (167 - 166)^2 + 2 \cdot (168 - 166)^2 + 2 \cdot (170 - 166)^2 + (172 - 166)^2) = 18{,}6$$

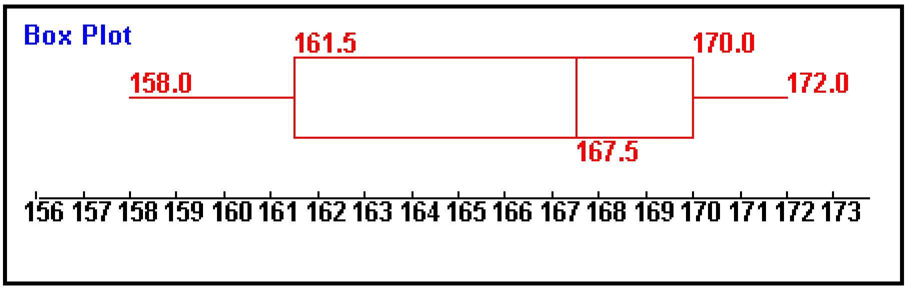
$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{18{,}6} = 4{,}31$$

Spannweite: x_S= 172 - 158 = 14

Quartile:

Qu = 162 (liegt in der Mitte der unteren Hälfte)

Qo = 170 (liegt in der Mitte der oberen Hälfte)



Boxplot-Diagramm

Aufgabe 60:

Dieselben Frauen gaben auch ihre Schuhgröße an.

Es ergaben sich folgende Nennungen.

39, 39, 38, 38, 37, 41, 38, 38, 40, 37

Berechnen oder stellen Sie folgende Größen zusammen:

Geordnete Urliste, Mittelwert (38,5), Median (38), Modus (38), Varianz, Standardabweichung (1,2), Spannweite (4) und Quartile (38; 39).

Lösung:

Urliste:

39, 39, 38, 38, 37, 41, 38, 38, 40, 37

Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(39 + 39 + 38 + 38 + 37 + 41 + 38 + 38 + 40 + 37) = 38{,}5$$

Sortierte Liste: 37, 37, 38, 38, 38, 38, 39, 39, 40, 41

Median: $x_{Med} = 38$

Modus: 38

Varianz und Standardabweichung:

$$s^2 = \frac{1}{10}(2 \cdot (37 - 38{,}5)^2 + 4 \cdot (38 - 38{,}5)^2 + 2 \cdot (39 - 38{,}5)^2 + (40 - 38{,}5)^2 + (41 - 38{,}5 +)^2)$$

$$= \frac{1}{10}(4{,}5 + 1 + 0{,}5 + 2{,}25 + 6{,}25) = 1{,}45$$

$$s = \sqrt{1{,}45} = 1{,}20$$

Spannweite: x_s= 41 - 37 = 4

Quartile:

Unsortierte Liste: 39, 39, 38, 38, 37, 41, 38, 38, 40, 37

Sortierte Liste: 37, 37, 38, 38, 38, 38, 39, 39, 40, 41

Qu = 38, Qo = 39

Aufgabe 61:

Eine Wetterstation liefert die Tagestemperaturen (in ^{0}C), gemessen um 12:00, für die 30 Tage eines Monats

11,8	12,4	18,5	24,2	23,5	20,8	21,5	23,5	20,6	15,4
14,8	17,5	16,9	18,2	16,4	17,9	20,3	19,5	17,9	18,5
24,0	23,5	25,2	23,6	22,2	20,7	21,0	20,4	18,9	21,8

a) Berechnen Sie die durchschnittliche Tagestemperatur.

b) Berechnen Sie den Median, den Quartilsabstand und die Spannweite.

c) Über viele Jahre gemittelt lagen die Durchschnittstemperaturen für diesen Monat bei 18,5^{0}C. Haben sich die klimatischen Verhältnisse geändert?

Lösung:

Durchschnittliche Tagestemperatur

$$n = 30 \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i = \frac{591,4}{30} \approx \underline{\underline{19,7}}$$

Stängel - Blatt - Diagramm

11	8				
12	4				
14	8				
15	4				
16	4	9			
17	5	9	9		
18	2	5	5	9	
19	5				
20	3	4	6	7	8
21	0	5	8		
22	2				
23	5	5	5	6	
24	0	2			
25	2				

$$x_{Med} = \frac{1}{2}(x_{15} + x_{16}) = \frac{1}{2}(20,3 + 20,4) = \underline{\underline{20,35}}$$

$$Q_1 = x_8 = \underline{\underline{17,9}}$$

$$Q_3 = x_{23} = \underline{\underline{22,2}}$$

$$Q_A = Q_3 - Q_1 = 22,2 - 17,9 = \underline{\underline{4,3}}$$

$$R = x_{30} - x_1 = 25,2 - 11,8 = \underline{\underline{13,4}}$$

Im Jahr der Messung lag die Durchschnittstemperatur bei 19,7 ^{0}C, also um 1,2 ^{0}C höher als der Durchschnitt der Durchschnittswerte, die über viele Jahre gemessen wurden (18,5 ^{0}C).Da wir aber nichts über die Streuung der gemittelten Durchschnittswerte wissen, lässt sich keine Aussage über eine klimatische Veränderung machen.

Aufgabe 62:

Schüler erfragen die Preise für zwei Zubehörteile für ihren Computer in verschiedenen Läden der Stadt. Die festgestellten Stückpreise lassen sich der folgenden Liste entnehmen.

Teil A (in €)	4,00	4,10	5,40	4,90	3,50	3,40
Teil B (in €)	11,00	11,90	14,90	10,00	12,60	9,90

a) Berechnen Sie jeweils die Standardabweichung.

b) Welcher Preis schwankt stärker?

Lösung:

a)

Teil A				Teil B			
i	x_i	$\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	i	x_i	$\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
1	4,00	4,217	0,047	1	11,00	11,717	0,514
2	4,10	4,217	0,014	2	11,90	11,717	0,033
3	5,40	4,217	1,399	3	14,90	11,717	10,131
4	4,90	4,217	0,466	4	10,00	11,717	2,948
5	3,50	4,217	0,514	5	12,60	11,717	0,780
6	3,40	4,217	0,667	6	9,90	11,717	3,301
	25,30		3,107		70,30		17,707

Teil A: $n = 6 \quad \bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{25,3}{6} = 4,217$

$$s^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{3,107}{6} = 0,518 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{s^2} = \underline{\underline{0,72}}$$

Teil B: $n = 6 \quad \bar{x} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{70,30}{6} = 11,717$

$$s^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{17,707}{6} = 2,951 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{s^2} = \underline{\underline{1,718}}$$

b) Die Preise für Teil B schwanken stärker.

Aufgabe 63:

In einer Firma werden Schrauben gefertigt, sie sollen 80 mm lang sein.

Bei einer Qualitätskontrolle werden aus der Produktion 90 Schrauben entnommen und deren Länge gemessen.

Länge in mm	79,3	79,4	79,5	79,6	79,7	79,8	79,9	80,0
abs. Häufigkeit	1	2	3	5	3	8	8	14
Länge in mm	80,1	80,2	80,3	80,4	80,5	80,6	80,7	
abs. Häufigkeit	11	11	9	4	5	5	1	

a) Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung durch eine Häufigkeitstabelle dar.

b) Bestimmen Sie die durchschnittliche Länge der Schrauben und bestimmen Sie die Standardabweichung.

c) Bestimmen Sie die Länge d, für die etwa 50% der Messwerte kleiner und etwa 50% der Messwerte größer als d sind. Wie nennt man diesen Wert? Berechnen Sie den Quartilsabstand.

Lösung:

a)

x_i	n_i	h_i	abs. SH	rel. SH
79,3	1	1,11%	1	1,11%
79,4	2	2,22%	3	3,33%
79,5	3	3,33%	6	6,67%
79,6	5	5,56%	11	12,22%
79,7	3	3,33%	14	15,56%
79,8	8	8,89%	22	24,44%
79,9	8	8,89%	30	33,33%
80,0	14	15,56%	44	48,89%
80,1	11	12,22%	55	61,11%
80,2	11	12,22%	66	73,33%
80,3	9	10,00%	75	83,33%
80,4	4	4,44%	79	87,78%
80,5	5	5,56%	84	93,33%
80,6	5	5,56%	89	98,89%
80,7	1	1,11%	90	100,00%
Summe	90	100,00%		

b)

i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$\bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
1	79,3	1	79,3	80,057	0,573
2	79,4	2	158,8	80,057	0,863
3	79,5	3	238,5	80,057	0,931
4	79,6	5	398,0	80,057	1,004
5	79,7	3	239,1	80,057	0,382
6	79,8	8	638,4	80,057	0,528
7	79,9	8	629,2	80,057	0,197
8	80,0	14	1120,0	80,057	0,045
9	80,1	11	881,1	80,057	0,020
10	80,2	11	882,2	80,057	0,225
11	80,3	9	722,7	80,057	0,531
12	80,4	4	321,6	80,057	0,471
13	80,5	5	402,5	80,057	0,981
14	80,6	5	403,0	80,057	1,474
15	80,7	1	80,7	80,057	0,413
		90	7205,1		8,678

$$n = \sum_{i=1}^{15} n_i = \underline{\underline{90}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{90}\sum_{i=1}^{15} x_i \cdot n_i = \frac{7205,1}{90} = \underline{\underline{80,057}}$$

$$s^2 = \frac{1}{90}\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = \frac{8,678}{90} = 0,096$$

$$s = \sqrt{0,096} = \underline{\underline{0,31}}$$

c)

79,3 x
79,4 x x
79,5 x x x
79,6 x x x x x
79,7 x x x
79,8 x x x x x x x x
79,9 x x x x x x x x

$Q_1 = x_{23} = 79,9$

80,0 x x x x x x x x x x x x x x
80,1 x x x x x x x x x x x

$x_{Med} = (x_{45} + x_{46})/2 = \underline{\underline{80,1 = d}}$

80,2 x x x x x x x x x x x
80,3 x x x x x x x x x

$Q_3 = x_{68} = 80,3$

$Q_A = Q_3 - Q_1 = 80,3 - 79,9 = 0,4$

80,4 x x x x
80,5 x x x x x
80,6 x x x x x
80,7 x

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 64:

Herr Matschi notiert an verschiedenen Tagen die Zeiten (in Minuten), die er für seinen Weg in die Arbeit benötigt: 55, 56, 51, 56, 25, 58, 54, 56, 56, 50, 52.

Zu seinem Arbeitskollegen macht er folgende Aussage:

"In 25% der Arbeitstage brauche ich 54 Minuten und mehr"

Was sagen Sie zu dieser Aussage und wie würden Sie diese Aussage widerlegen oder stützen? Begründen Sie Ihre Antwort auch durch Rechnung.

Lösung:

Oberes Quartil berechnen:

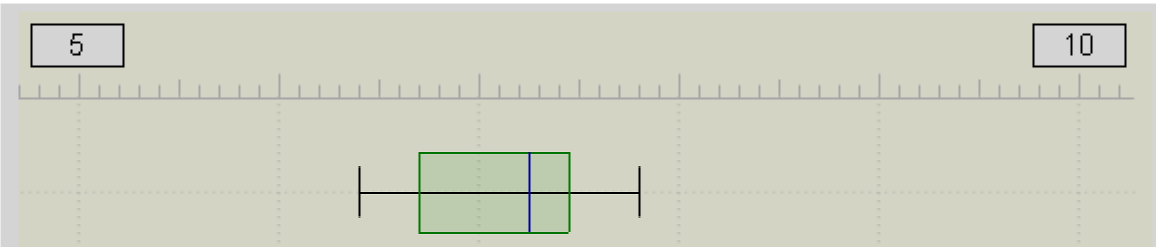
$Q_o = 0{,}75 \cdot (n + 1) = 0{,}75 \cdot 12 = 9$

$Q_o = 56$

55 wäre aber der Median und damit 50%

Aufgabe 65:

Bestimmen Sie den Median anhand des gegebenen Box-Plots.



Lösung:

Median=7,25

Aufgabe 66:

In der folgenden Tabelle sind die Fehlzeiten von den 50 Mitarbeitern der Backplasa AG des letzten Jahres aufgelistet.

Fehlzeit in Tage	0	3	5	9	12	18	21
Anzahl der MA	5	9	13	9	8	4	2

Berechnen Sie das untere und das obere Quartil. Berechnen Sie dabei den gerundeten und den genauen Wert für beide Quartile.

Lösung:

Unteres Quartil:

$\mathrm{x} = \mathrm{Round}(0{,}25 \cdot (\mathrm{n} + 1) = \mathrm{Round}(0{,}25 \cdot 51) = \mathrm{Round}(12{,}75)$

gerundeter Wert:

$\mathrm{Round}(12.75) = 13 \rightarrow \mathrm{x}_{13} - \text{Wert ist gesucht}$

$Q_u = 3$

genauer Wert:

$\mathrm{Round}(12.75) = 12{,}75 \rightarrow \mathrm{x}_{12{,}75} - \text{Wert ist gesucht}$

$x_{12} - Wert = 3$

$x_{13} - Wert = 3$

$Q_u = 3$

Oberes Quartil:

$\mathrm{x} = \mathrm{Round}(0{,}75 \cdot (\mathrm{n}+1) = \mathrm{Round}(0{,}75 \cdot 51) = \mathrm{Round}(38{,}25)$

gerundeter Wert:

$\mathrm{Round}(38{,}25) = 38 \rightarrow \mathrm{x}_{13} - \text{Wert ist gesucht}$

$Q_o = 12$

genauer Wert:

$\mathrm{Round}(38{,}25) = 38{,}25 \rightarrow \mathrm{x}_{38{,}25} - \text{Wert ist gesucht}$

$\mathrm{x}_{38} - \mathrm{Wert} = 12$

$\mathrm{x}_{39} - \mathrm{Wert} = 12$

$Q_o = 12$

Aufgabe 67:

In der folgenden Tabelle sind die Fehlzeiten von den 50 Mitarbeitern der Backplasa AG des letzten Jahres aufgelistet.

Fehlzeit in Tage	0	3	5	9	12	18	21
Anzahl der MA	5	9	13	9	8	4	2

Berechnen Sie die durchschnittliche Abweichung, die Varianz und die Standardabweichung. ($\bar{x} = 7{,}66$)

Lösung:

Durchschnittliche Abweichung:

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{d}} = \frac{1}{50} \cdot (5 \cdot |0 - 7{,}66| + 9 \cdot |3 - 7{,}66| + 13 \cdot |5 - 7{,}66| + 9 \cdot |9 - 7{,}66| + 8 \\ \cdot |12 - 7{,}66| + 4 \cdot |18 - 7{,}66| + 2 \cdot |21 - 7{,}66|) \\ = \frac{1}{50} \cdot (38{,}30 + 41{,}94 + 34{,}58 + 12{,}06 + 34{,}72 + 41{,}36 + 26{,}68) \\ = \frac{1}{50} \cdot 229.64 = 4{,}59 \text{ Tage}\end{aligned}$$

Varianz:

$$S^2 = \frac{1}{50} \cdot (5 \cdot (0 - 7{,}66)^2 + 9 \cdot (3 - 7{,}66)^2 + 13 \cdot (5 - 7{,}66)^2 + 9 \cdot (9 - 7{,}66)^2 + 8 \cdot (12 - 7{,}66)^2 + 4 \cdot (18 - 7{,}66)^2 + 2 \cdot (21 - 7{,}66)^2)$$

$$= \frac{1}{50} \cdot (293{,}39 + 195{,}44 + 91{,}28 + 16{,}16 + 150{,}68 + 427{,}66 + 355{,}91)$$

$$= \frac{1}{50} \cdot 1.530{,}52 = 30{,}61$$

Standardabweichung:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{30{,}61} = 5{,}53 \text{ Tage}$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

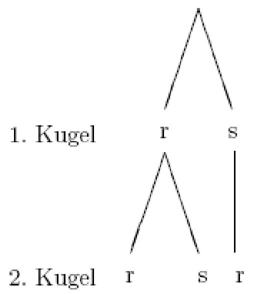
Baumdiagramme und Pfadregel

Aufgabe 68:

Eine Urne enthalte 5 rote Kugeln und eine schwarze Kugel. Nacheinander werden zwei Kugeln durch Ziehen ohne Zurücklegen gezogen.

Stellen Sie den Stichprobenraum in einem Baumdiagramm dar.

Lösung:

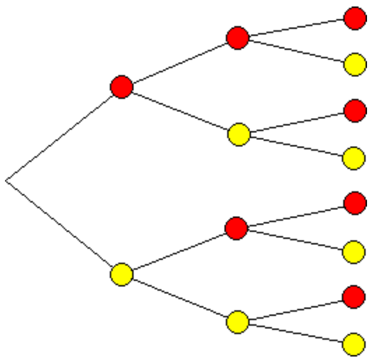


Aufgabe 69:

In einer Obstkiste befinden sich 10 rote Tomaten und 20 gelbe Tomaten gleicher Größe und gleicher Form. Aus der Kiste werden blind nacheinander drei Tomaten entnommen (ohne zurücklegen).

Zeichnen Sie das Baumdiagramm und geben Sie die Ergebnismenge S aller möglichen Ergebnisse an.

Lösung:



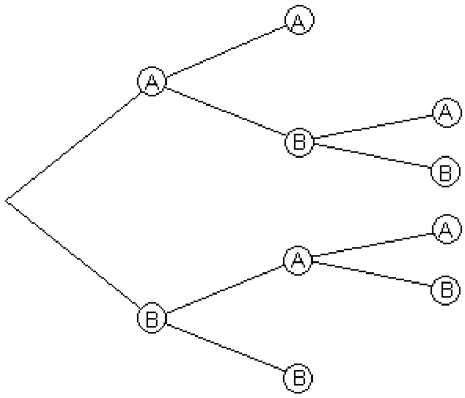
Ergebnismenge

$S = \{rrr; rrg; rgr; rgg; grr; grg; ggr; ggg\}$

Aufgabe 70:

Zwei Schüler A und B spielen gegeneinander Poolbillard. Gewinner ist derjenige, der als erster zwei Spiele gewinnt. Zeichnen Sie das Baumdiagramm und geben Sie die Ergebnismenge S an.

Lösung:



Ergebnismenge

$S = \{AA; ABA; ABB; BAA; BAB; BB\}$

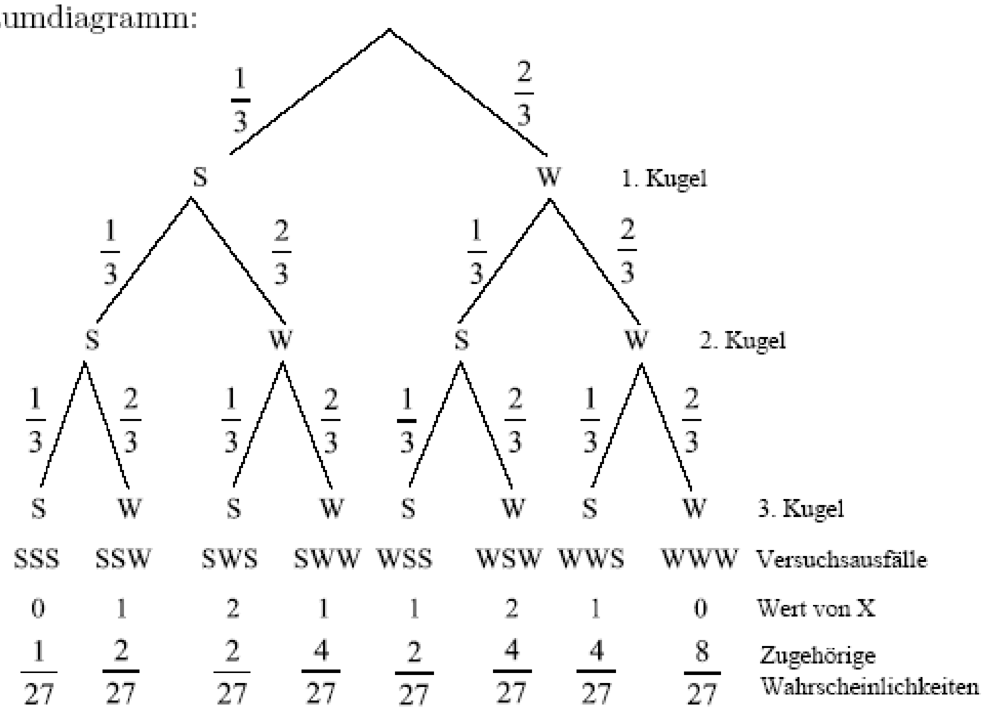
Aufgabe 71:

Eine Urne enthalte 30 Kugeln, 10 schwarze und 20 weiße. Es wird durch Ziehen mit Zurücklegen der Reihe nach 3 Kugeln entnommen und ihre Farbe schwarz (s) bzw. weiß (w) der Reihe nach notiert, z. B. wss.

Stellen Sie dieses Zufallsexperiment in einem Baum dar und tragen Sie die Wahrscheinlichkeiten ein.

Lösung:

Das Baumdiagramm:

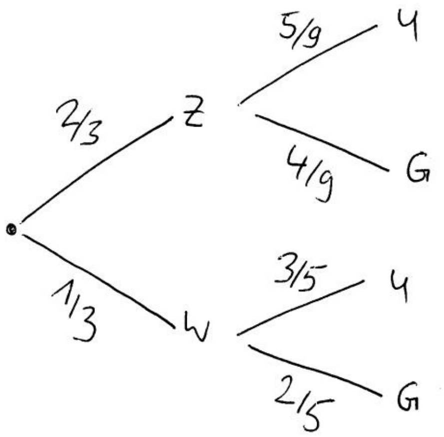


Aufgabe 72:

Eine Münze, die so belegt ist, dass P(Z)=2/3 und P(W)=1/3, wird geworfen. Erscheint Zahl, dann wird eine der Zahlen 1 bis 9 zufällig ausgewählt; erscheint Wappen, dann wählt man eine der Zahlen 1 bis 5. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit p an, dass man eine gerade Zahl (G) auswählt. (0,4296)

Lösung:

Baumdiagramm:

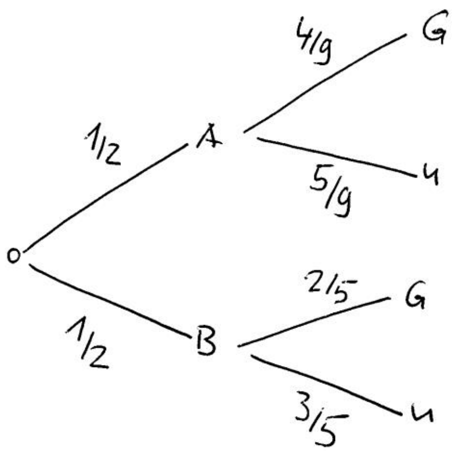


$$P(E)=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{58}{135}$$

Aufgabe 73:

Schachtel A enthält 9 Zettel mit den Zahlen 1 bis 9, Schachtel B enthält 5 Zettel mit den Zahlen 1 bis 5. Aus einer zufällig ausgewählten Schachtel wird zufällig ein Zettel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zettel aus Schachtel A gezogen wurde, wenn die Zahl darauf gerade ist? (0,5263)

Lösung:



Anzahl der möglichen Fälle:

$$P=\frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{10}{19}$$

Aufgabe 74:

In einer Urne befinden sich eine blaue und sieben rote Kugeln. Für den weiteren Spielverlauf liegen drei blaue Kugeln bereit.

Es gilt folgende Regel: zieht man eine blaue Kugel, so wird sie in die Urne zurückgelegt. Zieht man eine rote Kugel, so legt man sie beiseite und stattdessen eine blaue Kugel in die Urne. Es wird dreimal gezogen.

Zeichnen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: die erste Kugel ist blau

B: nur die erste Kugel ist blau

C: genau eine Kugel ist blau

D: mindestens eine Kugel ist blau

E: höchstens eine Kugel ist blau

Lösung:

P(A) = 1/8

P(B) = 21/256

P(C) = 63/128

P(D) = 151/256

P(E) = 231/256

Aufgabe 75:

Der Schülerrat eines Berufskollegs besteht aus 3 Schülern und 2 Schülerinnen. Es wird ausgelost, wer in diesem Jahr Vorsitzender und Stellvertreter wird. Zuerst werden der Vorsitzende und dann der Stellvertreter ausgelost.

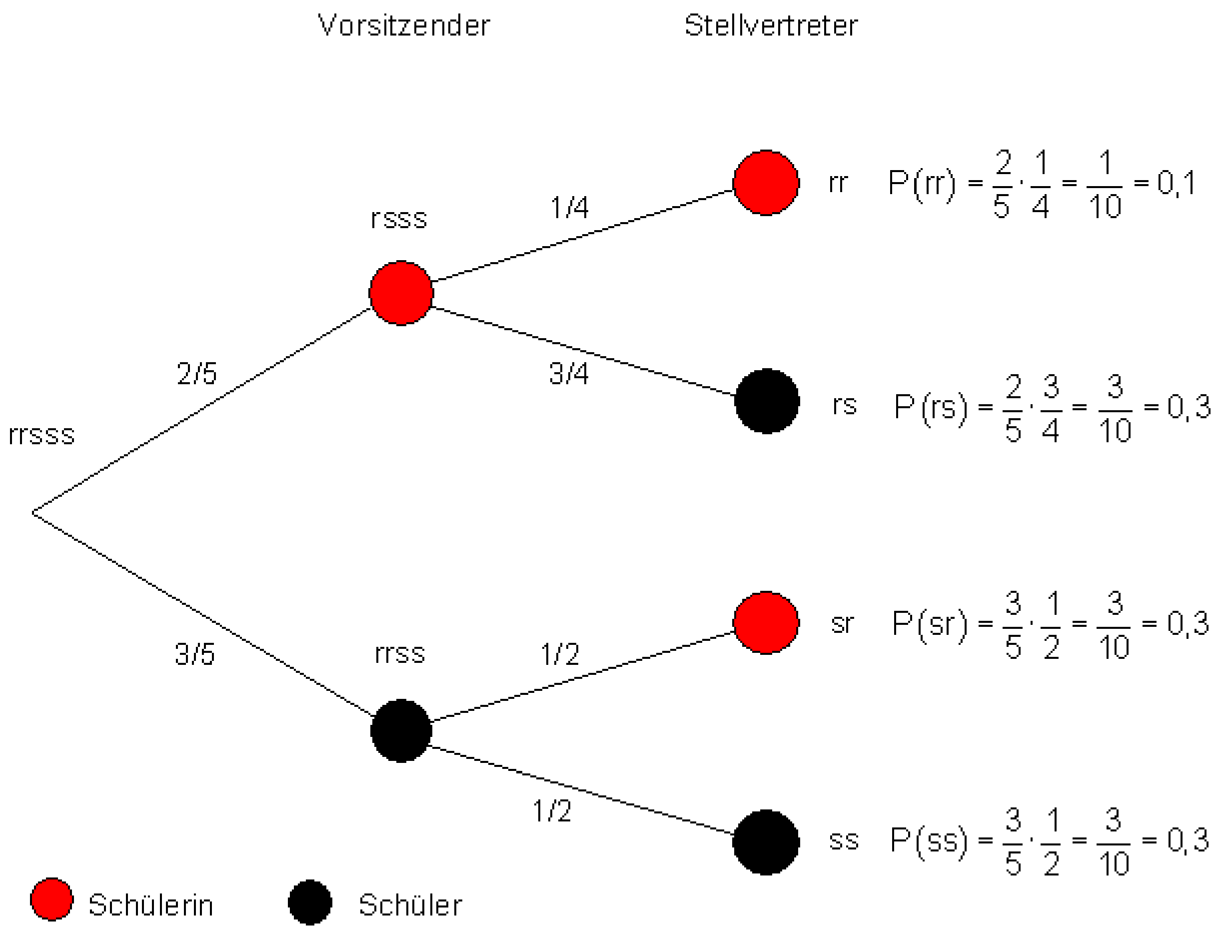
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird je eine Schülerin Vorsitzende und eine Schülerin Stellvertreterin?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Schülerin Vorsitzende und ein Schüler Stellvertreter?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Schülerin Stellvertreterin?

Lösung:

Es handelt sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment, das durch ein Urnenmodell simuliert werden kann. In der Urne befinden sich 5 Kugeln, 2 rote stehen für Schülerin und 3 schwarze stehen für Schüler. Nacheinander werden zwei Kugeln aus der Urne gezogen (Ziehen ohne zurücklegen). Ein Baumdiagramm veranschaulicht diesen Sachverhalt.



a)

A: Eine Schülerin ist Vorsitzende, die andere Stellvertreterin

$P(A) = P(rr) = 0{,}1$

b)

B: Schülerin ist Vorsitzende und Schüler ist Stellvertreter

$P(B) = P(rs) = 0{,}3$

c)

C: Schülerin ist Stellvertreterin $\Rightarrow C = \{rr; sr\}$

$P(C) = P(rr) + P(sr) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$

Aufgabe 76:

In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 gelbe Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln mit zurücklegen gezogen.

a) Erstellen Sie das Baumdiagramm und die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle.

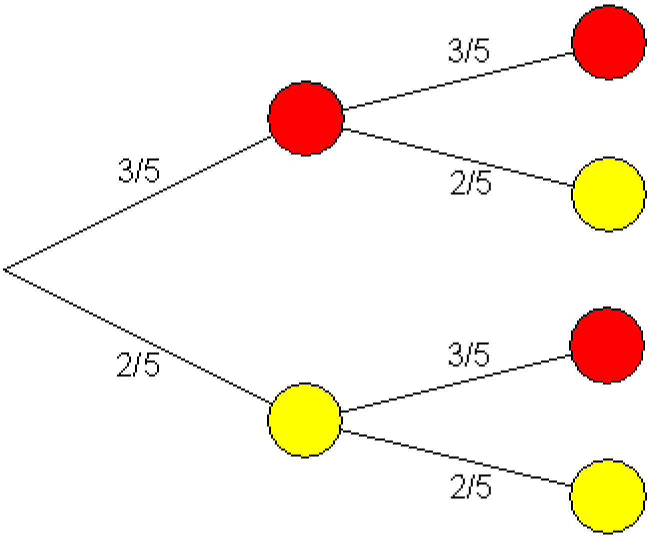
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse

A: Die gezogenen Kugeln haben ungleiche Farben.

B: Mindestens eine der gezogenen Kugel ist gelb.

Lösung:

a)



$$P(rr) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0{,}36$$

$$P(rg) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24$$

$$P(gr) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24$$

$$P(gg) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

b)

A:

$$A = \{rg; gr\} \Rightarrow P(A) = P(rg) + P(gr) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25} = 0{,}48$$

B:

$$B = \{rg; gr; gg\} \Rightarrow P(A) = P(rg) + P(gr) + P(gg) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} + \frac{4}{25} = \frac{16}{25} = 0{,}64$$

Aufgabe 77:

In einer Urne befinden sich 3 rote und 4 gelbe Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln ohne zurücklegen gezogen.

a) Erstellen Sie das Baumdiagramm und die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle.

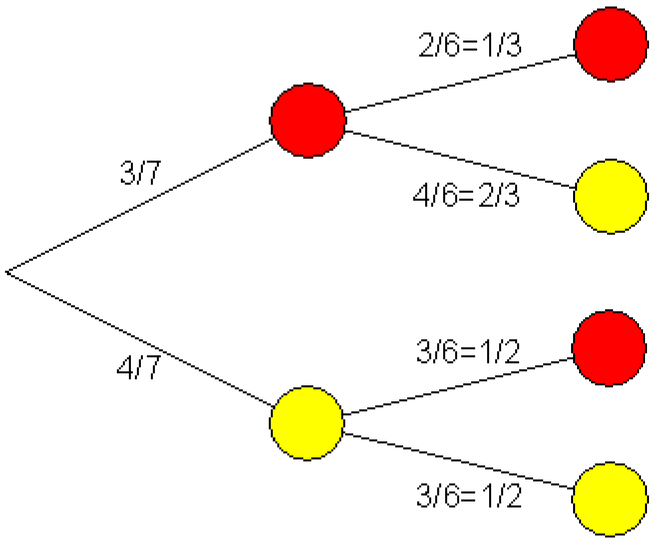
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse

A: Die zweite gezogene Kugel ist rot.

B: Beide Kugeln haben die gleiche Farbe.

Lösung:

a)



$$P(rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7} \approx 0{,}143$$

$$P(rg) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7} \approx 0{,}286$$

$$P(gr) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7} \approx 0{,}286$$

$$P(gg) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7} \approx 0{,}286$$

b)

A:

$$A = \{rr; gr\} \Rightarrow P(A) = P(rr) + P(gr) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$$

B:

$$B = \{rr; gg\} \Rightarrow P(A) = P(rr) + P(gg) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$$

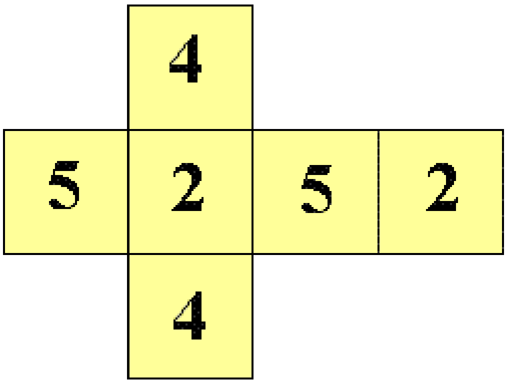
Aufgabe 78:

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Würfeln mit dem Würfel, dessen Netz unten abgebildet ist,

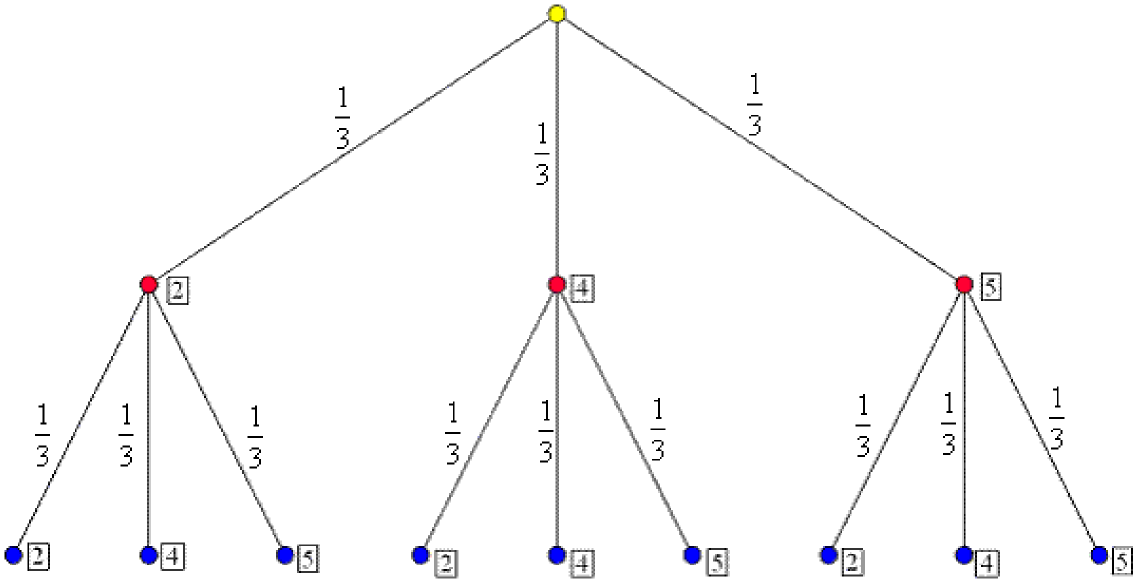
a) zwei gleiche Zahlen zu würfeln.

b) erst eine größere, dann eine kleinere Zahl zu würfeln.

c) zuerst eine „2“ zu würfeln.



Lösung:



a) P(zwei gleiche Z.) $=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

b) P(erst größere Z) $=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

c) P(erst "2") $=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 79:

In einem Gefäß sind 50 gleichartige Kugeln, davon 20 rote und 30 blaue.

Es werden 3 Kugeln gezogen mit Zurücklegen.

Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis?

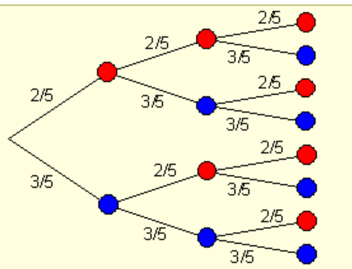
a) A: Alle Kugeln sind blau.

b) B: Eine Kugel ist blau, zwei sind rot.

c) C: Eine Kugel ist rot, zwei sind blau.

d) D: Höchstens eine Kugel ist rot.

Lösung:

		$P(\{rrr\}) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0{,}064$ $P(\{rrb\}) = P(\{rbr\}) = P(\{brr\}) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = 0{,}096$ $P(\{rbb\}) = P(\{brb\}) = P(\{bbr\}) = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0{,}144$ $P(\{bbb\}) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0{,}216$
a)	A: Alle Kugeln sind blau. $P(A) = P(\{bbb\}) = \underline{\underline{0{,}216}}$	
b)	B: Eine Kugel ist blau, zwei sind rot. $P(B) = P(\{rrb\}) + P(\{rbr\}) + P(\{brr\}) = 3 \cdot 0{,}196 = \underline{\underline{0{,}288}}$	
c)	C: Eine Kugel ist rot, zwei sind blau. $P(C) = P(\{rbb\}) + P(\{brb\}) + P(\{bbr\}) = 3 \cdot 0{,}144 = \underline{\underline{0{,}432}}$	
d)	D: Höchstens eine Kugel ist rot. Das bedeutet keine oder nur eine. $P(D) = P(\{bbb\}) + P(\{bbr\}) + P(\{brb\}) + P(\{rbb\}) = 0{,}216 + 3 \cdot 0{,}144 = \underline{\underline{0{,}648}}$	

Aufgabe 80:

Bei der Produktion von Tongefäßen hat man erfahrungsgemäß 20% Ausschuss.

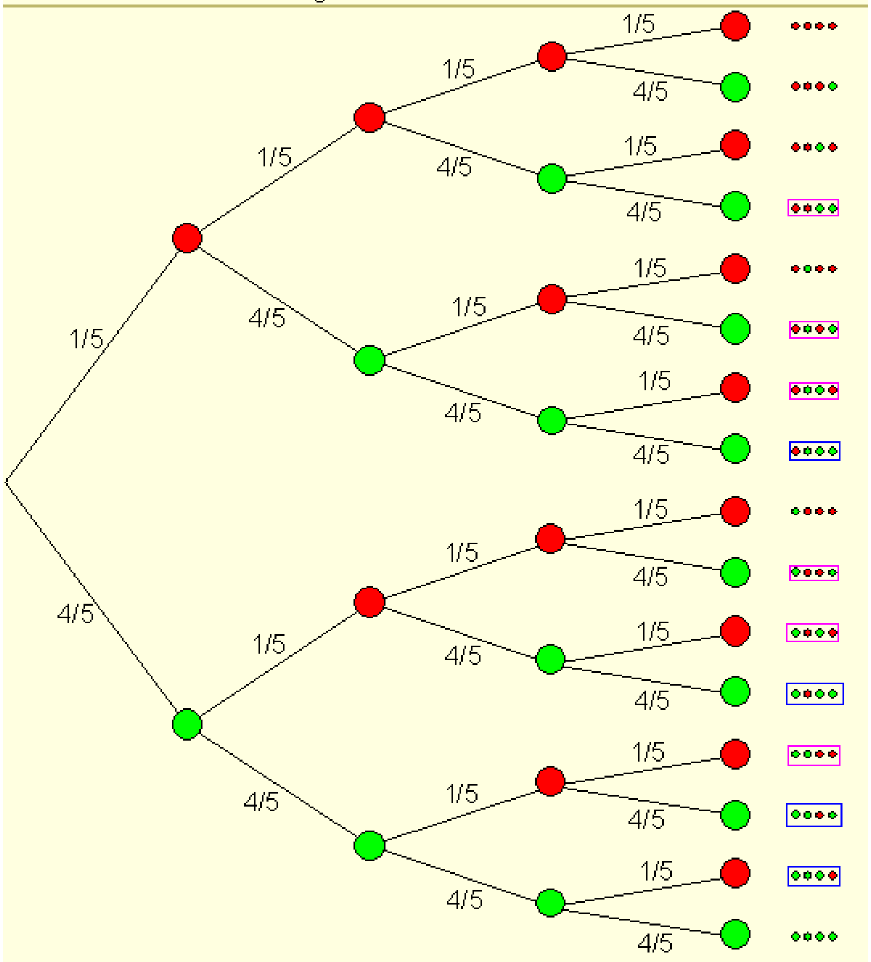
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das bei der Herstellung von vier Gefäßen drei brauchbar sind? (0,4096)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das bei der Herstellung von vier Gefäßen zwei brauchbar sind? (0,1536)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das bei der Herstellung von vier Gefäßen mindestens drei brauchbar sind? (0,8192)

Lösung:

Modell:
Urne mit einer roten (Ausschuss) und vier grünen (kein Ausschuss) Kugeln.
Viermal Ziehen mit Zurücklegen.



a)	A: Drei von vier sind brauchbar. Das Baumdiagramm enthält 4 Pfade, die für das Ereignis A relevant sind. $P(A) = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 4 \cdot \frac{64}{625} = \underline{\underline{0{,}4096}}$
b)	B: Zwei von vier sind brauchbar. Das Baumdiagramm enthält 6 Pfade, die für das Ereignis B relevant sind. $P(B) = 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 6 \cdot \frac{16}{625} = \underline{\underline{0{,}1536}}$
c)	C: Mindestens drei von vier sind brauchbar. Bedeutet drei oder mehr sind brauchbar. $P(C) = P(A) + \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 4 \cdot \frac{64}{625} + \frac{256}{625} = \underline{\underline{0{,}8192}}$

Aufgabe 81:

Jackie hat in einer Schublade 18 blaue und 12 andersfarbige Kugelschreiber. Bei sieben blauen Kugelschreibern und bei fünf der anderen ist die Mine eingetrocknet.

a) Erstellen Sie ein Baumdiagramm

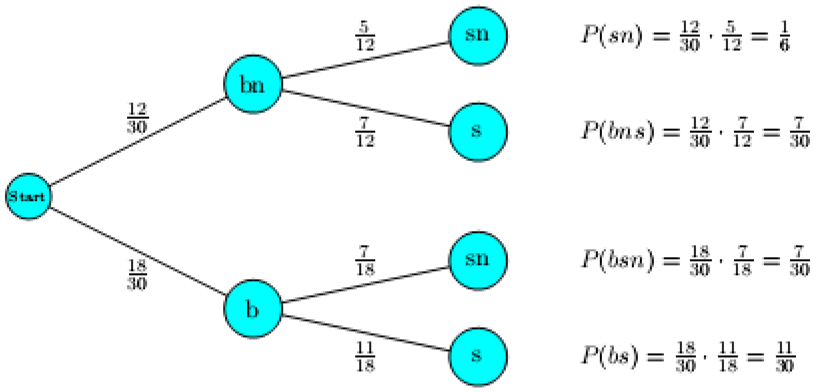
(b=blau ; bn=nicht blau ; s=schreibt ; sn=schreibt nicht)

b) Jackie greift ohne hinzusehen in die Schublade und nimmt einen Kugelschreiber heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist seine Mine nicht eingetrocknet? (0,6)

c) Jackie hat einen blauen Kugelschreiber aus der Schublade genommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit „schreibt“ er?

Lösung:

a)



b)

$$\mathrm{P(B)} = \frac{12}{30} \cdot \frac{7}{12} + \frac{18}{30} \cdot \frac{11}{18} = \frac{7}{30} + \frac{11}{30} = \frac{18}{30} = 0{,}6$$

c)

$$\mathrm{P(C)} = \frac{\frac{18}{30} \cdot \frac{11}{18}}{\frac{18}{30} \cdot \frac{11}{18} + \frac{18}{30} \cdot \frac{7}{18}} = \frac{\frac{11}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{11}{18} = 0{,}6111$$

Vierfeldertafel

Aufgabe 82:

Von den 36 Rauchern einer 78 Schüler umfassenden Berufsschulklasse sind 22 im Sportverein. 32 Jugendliche gehören keinem Sportverein an. Erstellen Sie eine Vierfeldertafel.

Lösung:

	Raucher	Nichtraucher	Summe
Sportverein	22	24	46
Kein Sportverein	14	18	32
Summe	36	42	78

Aufgabe 83:

Von 108 Schülern wünschen sich 74, einmal eigene Kinder groß zu ziehen. 35 % der Jungen möchten allerdings keine Kinder haben. Von den 48 Mädchen ist eine Mehrheit für eigene Kinder. Wie viele Mädchen und wie viele Jungen möchten später einmal eigene Kinder haben?

Lösung:

	Mädchen	Junge	Summe
Kinder	35	39	74
keine Kinder	13	21	34
Summe	48	60	108

Aufgabe 84:

Ein Uhrhändler erhält 40 Uhren, von denen 65 % mit Tagesanzeige sind. Ein Fünftel der Uhren hat ein Stahlarmband. 12 Uhren haben keine Tagesanzeige und kein Stahlarmband. Wie viele Uhren mit Stahlarmband haben eine Tagesanzeige? (alle Angaben in Prozent)

Lösung:

	Tagesanzeige	Keine Tagesanzeige	Summe
Stahlarmband	15	5	20
keine Stahlarmband	50	30	80
Summe	65	35	100

Aufgabe 85:

Die Belegschaft einer Firma besteht zu 43% aus Männern. Von allen Mitarbeitern sind 30% älter als 50 Jahre. Die Wahrscheinlichkeit unter den Firmenangehörigen eine Frau zu finden, die älter als 50 Jahre ist, beträgt 12%.

Lösung:

	Mann	Frau	Summe
jünger als 50	25%	45%	70%
älter als 50	18%	12%	30%
Summe	43%	57%	100%

Aufgabe 86:

In einer Schulklasse mit 16 Jungen und 9 Mädchen besitzen 15 Schüler einen eigenen Computer. Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei willkürlicher Auswahl eines Schülers einen Jungen ohne eigenen Computer trifft, beträgt 28%. (alle Angaben in Prozent)

Lösung:

	Jungen	Mädchen	Summe
Mit Computer	36%	24%	60%
Ohne Computer	28%	12%	40%
Summe	64%	36%	100%

Aufgabe 87:

1. In einer Klasse mit 30 Schülern spielen 19 Kinder ein Instrument und 40% der Schüler sind Buben. Genau fünf Buben spielen kein Instrument. Wie viele Mädchen spielen kein Instrument?

Lösung:

	Instrument	kein Instrument	Summe
Buben	7	5	12
Mädchen	12	6	18
Summe	19	11	30

Aufgabe 88:

Von 320 Schülern haben 250 zu Hause ein eigenes Radiogerät, 130 einen eigenen Fernseher, während 12,5% der Schüler weder einen Fernseher noch ein eigenes Radio besitzen. Wie viele Schüler haben einen eigenen Fernseher und ein eigenes Radio?

Lösung:

	Radio	kein Radio	Summe
Fernseher	100	30	130
Kein Fernseher	150	40	190
Summe	250	70	320

Aufgabe 89:

Ein Karton mit Müsliriegeln enthält 240 Stück, von denen 75% mit Vollmilchschokolade und der Rest mit Zartbitterschokolade überzogen ist. Ein Drittel der Riegel ist mit einem roten Zuckerguss versehen, und 50 Riegel sind zartbitter und haben keinen roten Zuckerguss. Wie viele Vollmilch-Müsliriegel sind rot?

Lösung:

	Zartbitter	Vollmilch	Summe
Rot	10	70	80
Nicht rot	50	110	160
Summe	60	180	240

Aufgabe 90:

Von den 30,917 Millionen Erwerbstätigen in Deutschland haben 50,9 % eine Arbeitsstätte, die weniger als 10 km entfernt liegt. Von diesen fahren 48,4 % mit dem eigenen PKW zur Arbeit. Insgesamt benutzen 60,3 % der Erwerbstätigen das eigene Auto für die Fahrt zur Arbeit.

Erstellen Sie eine Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten (Anzahl der Personen).

Lösung:

	mit PKW	anderes Verkehrsmittel	Summe
unter 10 km	7,617	8,120	15,737
über 10 km	11,026	4,154	15,180
Summe	18,643	12,74	30,917

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 91:

Aufgrund von statistischen Erhebungen weiß man über eine bestimmte Krankheit folgendes: Die Krankheit tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{150}$ in der Bevölkerung auf. Der Test zur Diagnose dieser Krankheit zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,97 die Krankheit an, wenn man tatsächlich krank ist. Ist man nicht krank, so zeigt dies der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 an.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist jemand tatsächlich krank, bei dem der Test die Krankheit anzeigt?

Lösung:

	Test positiv	Test negativ	gesamt
Person krank	$\frac{97}{100}\cdot\frac{1}{150} \approx 0{,}65\ \%$	$\frac{3}{100}\cdot\frac{1}{150} = 0{,}02\ \%$	$\frac{1}{150} \approx 0{,}67\ \%$
Person gesund	$\frac{5}{100}\cdot\frac{149}{150} \approx 4{,}97\ \%$	$\frac{95}{100}\cdot\frac{149}{150} \approx 94{,}37\ \%$	$\frac{149}{150} \approx 99{,}33\ \%$
gesamt	5,61 %	94,39 %	100 %

$$P_{positiv}(krank) = \frac{\frac{97}{100}\cdot\frac{1}{150}}{\frac{97}{100}\cdot\frac{1}{150} + \frac{5}{100}\cdot\frac{149}{150}} \approx 11{,}52\ \%$$

Aufgabe 92:

Trotz aller Warnungen vor den gesundheitlichen Gefahren des Rauchens verzichten viele Bundesbürger nicht darauf. So stuften sich 35,1 % der 34,3 Millionen männlichen Deutschen über 10 Jahren als regelmäßige oder gelegentliche Raucher ein, sowie 20,6 % der 37,5 Millionen Frauen dieser Altersgruppe.

Erstellen Sie sowohl ein Baumdiagramm als auch eine sinnvoll beschriftete Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten und eine mit absoluten Häufigkeiten.

Lösung:

Absolute/relative Häufigkeiten

	Männer	Frauen	Summe
Raucher	12,039	7,725	19,764
Kein Raucher	22,261	29,775	52,036
Summe	34,300	37,500	71,800
	Männer	Frauen	Summe
Raucher	17%	11%	28%
Kein Raucher	31%	41%	72%
Summe	48%	52%	100%

Aufgabe 93:

In 35,8 % der Haushalte der alten Bundesländer lebt nur eine Person; der entsprechende Anteil der Einpersonen-Haushalte in den neuen Bundesländern beträgt 30,1 %, wobei sich 18,5 % aller 36,7 Millionen Haushalte Deutschlands in Ostdeutschland befinden.

Erstellen Sie eine sinnvoll beschriftete Vierfeldertafel mit den absoluten Häufigkeiten.

Lösung:

	Neue Bundesländer	Alte Bundesländer	Summe
Ein-Personen-Haushalt	2,044	10,708	12,752
Mehr-Personen-Haushalt	4,746	19,202	23,948
Summe	6,790	29,91	36,700

Mengenalgebra

Aufgabe 94:

Ein normaler 6-seitiger Würfel wird einmal geworfen. Geben Sie die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise an:

(a) A: Die Augenzahl ist gerade.

(b) B: Die Augenzahl ist ungerade.

(c) C: Die Augenzahl ist größer als 6.

(d) D: Die Augenzahl ist keine 5.

(e) E: Die Augenzahl ist eine Quadratzahl.

(f) F: Die Augenzahl ist eine Primzahl.

Lösung:

Grundraum: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(a) $A = \{2, 4, 6\}$

(b) $B = A^c = \Omega \backslash A = \{1, 3, 5\}$.

(c) $C = \{\emptyset\}$ unmögliches Ereigniss.

(d) $D = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(e) $E = \{1, 4\}$

(f) $F = \{2, 3, 5\}$

Aufgabe 95:

Ein Würfel wird zweimal geworfen. Geben Sie die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise an:

(a) A: Die Augensumme ist 7.

(b) B: Die Augensumme ist eine Primzahl.

(c) C: Die Augensumme ist eine Quadratzahl und ungerade.

(d) D: Das Produkt der Augenzahlen ist eine Quadratzahl.

Lösung:

Grundraum:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);\\&(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);\\&(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);\\&(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6);\\&(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);\\&(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6);\}\end{aligned}$$

(a) $A = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$

(b) Primzahlen $= \{2,3,5,7,11\}$

$$\begin{aligned}B = \{&(1,1);(1,2);(2,1);(1,4);(2,3);(3,2);\\&(4,1);(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);\\&(6,2);(5,6);(6,5)\}\end{aligned}$$

(c) $C = \{(3,6);(6,3);(4,5);(5,4)\}$

(d) $D = \{(2,2);(1,4);(4,1);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$

Aufgabe 96:

Ein normaler 6-seitiger Würfel wird einmal geworfen. Geben Sie die folgenden Ereignisse in Mengenschreibweise an:

(a) A: Die Augenzahl ist durch zwei teilbar.

(b) B: Die Augenzahl ist durch drei teilbar.

(c) C: Die Augenzahl ist keine Primzahl.

(d) Bestimmen Sie $A \cap B$, $A \cap C$ und $B \cap C$.

(e) Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cup C$ und $B \cup C$.

Lösung:

(a) $A = \{2, 4, 6\}$

(b) $B = \{3, 6\}$

(c) $C = \{1, 4, 6\}$

(d)
$$A \cap B = \{6\}$$
$$A \cap C = \{4, 6\}$$
$$B \cap C = \{6\}$$

(e)
$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$
$$A \cup C = \{1, 2, 4, 6\}$$
$$B \cup C = \{1, 3, 4, 6\}$$

Aufgabe 97:

Eine Klasse enthält 10 Schüler und 20 Schülerinnen. Jeweils die Hälfte davon hat braune Augen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person ein Schüler ist oder braune Augen hat. (0,6667)

Lösung:

Es sei A={Schüler} und B={braune Augen}

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \quad P(b) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$P = P(A \cup B) == P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 98:

In einem Abiturjahrgang am Berufskolleg sind 100 Schüler/innen, davon haben 87 Spanisch (S) und 75 Französisch (F) gelernt, 70 beherrschen beide Fremdsprachen.

a) Wie viele Schüler/innen lernten Französisch oder Spanisch? (oder bedeutet hier Französisch, Spanisch oder beides) (92)

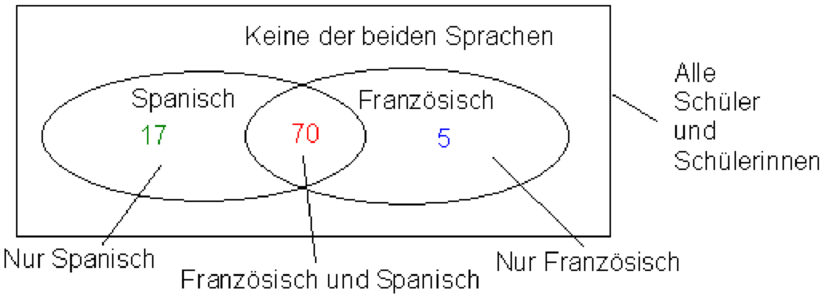
b) Ein Schüler/in wird zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er/sie Spanisch oder Französisch gelernt hat. (oder bedeutet hier Französisch, Spanisch oder beides) (0,92)

Lösung:

a) Man kann nun nicht einfach die Zahlen für Spanisch und Französisch addieren, denn dann käme man auf eine Schülerzahl von 87 + 75 = 162.

Das ist deshalb falsch, weil man die Schüler/innen die Spanisch und Französisch gelernt haben damit doppelt zählt.

87 Schüler/innen mit Spanisch davon 70 mit Spanisch und Französisch, also 17 nur mit Spanisch 75 Schüler/innen mit Französisch davon 70 mit Spanisch und Französisch, also 5 nur mit Französisch



Die 70 Schüler/innen mit Spanisch und Französisch sind sowohl in den 87 mit Spanisch als auch in den 75 mit Französisch enthalten. Addiert man die Anzahl der Schüler/innen mit Spanisch (87) und die Anzahl der Schüler/innen mit Französisch (75), so hat man die Anzahl der Schüler/innen mit Spanisch und Französisch doppelt gezählt. Daher muss man 70 von der Summe (162)subtrahieren.

Anzahl der Schüler/innen mit Spanisch oder Französisch:

$$87 + 75 - 70 = 92 \text{ bzw. } 17 + 70 + 5 = 92$$

Das bedeutet, 8 Schüler/innen lernten in der Gymnasialen Oberstufe keine der beiden Fremdsprachen.

b)

Zuerst definieren wir die Ereignisse wie folgt:

S: Schüler/in hatte Spanisch F: Schüler/in hatte Französisch

Wahrscheinlichkeit: $P(S \text{ oder } F) = \frac{87+75-70}{100} = 0,92$

mit Termumformung: $P(S \text{ oder } F) = \underbrace{\frac{87}{100}}_{P(S)} + \underbrace{\frac{75}{100}}_{P(F)} - \underbrace{\frac{70}{100}}_{P(S \text{ und } F)} = 0,87 + 0,75 - 0,70 = 0,92$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 99:

Für die Elektrotechnik-Studenten einer Universität ist die Wahrscheinlichkeit, nach dem Bachelor-Abschluss ein Master-Studium zu beginnen gleich $\frac{1}{4}$, für Maschinenbau-Studenten dagegen gleich $\frac{1}{3}$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an,

a) dass Studenten beider Fächer nach dem Bachelor-Abschluss ein Master-Studium beginnen.

b) dass Studenten der Elektrotechnik oder Maschinenbau nach dem Bachelor-Abschluss ein Master-Studium beginnen.

Lösung:

a) (4)

$$P(E \cap M) = P(E) \cdot P(M) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

b) (4)

$$P(E \cup M) = P(E) + P(M) - P(E \cap M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 100:

In einem Informatik-Kurs bestehend aus 100 Studenten, haben 54 Studenten Mathematik, 69 Chemie und 35 beide Fächer belegt. Wenn wir zufällig einen Studenten auswählen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür,

a) (3) dass er Mathematik oder Chemie belegt hat?

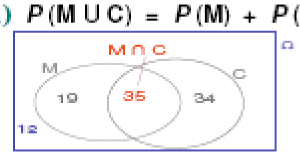
b) (3) dass er keins von diesen beiden Fächern belegt hat?

c) (4) dass er Chemie aber nicht Mathematik belegt hat?

Lösung:

__Lösung:__ *Additionssatz*

a) $P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) = 54/100 + 69/100 - 35/100 = 88/100$



b) $P(\overline{M \cup C}) = 1 - P(M \cup C) = 1 - 88/100 = 12/100$

c) $P(C \setminus M) = P(C) - P(M \cap C) = 69/100 - 35/100 = 34/100$

Aufgabe 101:

Bei der Herstellung eines Gerätes sind zwei Fehler aufgetreten.

15% der Produktion haben den Fehler F_1 und 10% den Fehler F_2.

82% der Geräte arbeiten fehlerfrei.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein Gerät beide Fehler?

Lösung:

Vorarbeit:

Gegeben sind diese Wahrscheinlichkeiten: $P(F_1) = 0{,}15$ und $P(F_2) = 0{,}10$.

Wenn 82 % fehlerfrei arbeiten, dann sind 18% defekt, das bedeutet, dass die den Fehler F_1 **oder** den Fehler F_1 haben: $p_{def} = P(F_1 \cup F_2) = 0{,}18$.

a) Anwendung des Additionssatzes für das Oder-Ereignis:

$$P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) \qquad (1)$$

Setzt man hier die bekannten Werte ein, folgt:

$$0{,}18 = 0{,}15 + 0{,}10 - P(F_1 \cap F_2)$$

$$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}15 + 0{,}10 - 0{,}18$$

$$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}07 \text{ .}$$

Ergebnis: Ein Gerät hat mit 7 % Wahrscheinlichkeit beide Fehler.

Kombinatorik

Aufgabe 102:

Wie groß ist die Anzahl der möglichen Stichproben vom Umfang k=3 aus einer Grundgesamtheit von n=12 Elementen (mit und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, bzw. mit und ohne Wiederholungen)?

Lösung:

Anzahl der möglichen Stichproben		
	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
mit Berücksichtigung der Reihenfolge	$N^n = 12^3 = 1728$	$\frac{N!}{(N-n)!} = \frac{12!}{(12-3)!} = 1320$
ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	$\binom{N+n-1}{n} = \binom{12+3-1}{3} = 364$	$\binom{N}{n} = \binom{12}{3} = 220$

Aufgabe 103:

In einer Urne liegen 10 Kugeln mit den Nummern 1 bis 10. Man zieht eine Kugel zufällig, notiert ihre Nummer und legt sie dann wieder zurück. Wie viele verschiedene Zahlenfolgen erhält man, wenn man 6-mal zieht? (1.000.000)

Lösung:

Geordnete Stichprobe mit zurücklegen

$n^k = 10^6 = 1.000.000$

Aufgabe 104:

In einer Urne liegen 10 Kugeln mit den Nummern 1 bis 10. Man zieht nacheinander 6 Kugeln ohne Zurücklegen und notiert ihre Nummern in der Reihenfolge, in der sie erscheinen. Wie viele Möglichkeiten gibt es? (151.200)

Lösung:

Geordnete Stichprobe ohne zurücklegen

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-6)!} = 151.200$$

Aufgabe 105:

In einer Urne sind 10 Kugeln mit den Nummern 1 bis 10. Es werden mit einem Griff 6 Kugeln gezogen. Wie viele Möglichkeiten gibt es? (210)

Lösung:

Ohne Reihenfolge und ohne zurücklegen

$$\binom{10}{6} = 210$$

Aufgabe 106:

Eine Fußballmannschaft besteht bekanntlich aus 11 Spielern Der Trainer will für Elfmeterschießen 5 Spieler aus seiner Mannschaft auswählen. Wie viele Möglichkeiten hierfür gibt es? (462)

Lösung:

Ohne Reihenfolge und ohne zurücklegen

$$\binom{11}{5} = 462$$

Aufgabe 107:

16 Personen wollen mit einem Autobus fahren, der genau 5 freie Plätze hat. Wie viele Möglichkeiten gibt es die 5 Plätze zu besetzen, wenn die verschiedenen Anordnungen der Personen nicht berücksichtigt werden? (4368)

Lösung:

Ohne Reihenfolge und ohne zurücklegen

$$\binom{16}{5} = 4.368$$

Aufgabe 108:

Eine Fußballmannschaft besteht bekanntlich aus 11 Spielern Der Trainer entscheidet sich dafür, 5 Spieler der Mannschaft für das Elfmeterschießen auszuwählen und gleichzeitig die Reihenfolge festzulegen, in welcher die 5 Spieler zum Elfmeter antreten sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für dieses Auswahlverfahren? (55.440)

Lösung:

Mit Reihenfolge und ohne zurücklegen

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{11!}{(11-5)!} = 55.440$$

Aufgabe 109:

Ein Autofahrer muss auf seiner Fahrt 4 Ampeln passieren. Jede Ampel hat 3 Phasen: grün, orange, rot. Die Ampeln sind nicht aufeinander abgestimmt. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten. (81)

Lösung:

Geordnete Stichprobe mit zurücklegen

$n^k = 3^4 = 81$

Aufgabe 110:

Bei einem Kombinationsschloss sind die einzelnen Einstellungen durch 3-ziffrige Zahlen mit Ziffern aus 1 bis 9 möglich. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Einstellungen. (729)

Lösung:

$n^k = 9^3 = 729$

Aufgabe 111:

Es sollen 5 unterscheidbare Kugeln auf 9 unterscheidbare Urnen verteilt werden. In einer Urne darf höchstens eine Kugel liegen. Wie viele Verteilungen gibt es? (15.120)

Lösung:

Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{9!}{(9-5)!} = 15.120$$

Aufgabe 112:

Für ein Projekt sollen aus 7 Bewerbern ein Projektleiter und ein Stellvertreter bestimmt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es? (42)

Lösung:

Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{7!}{(7-2)!} = 42$$

Aufgabe 113:

Auf wie viele Arten können sich 4 Leute auf vier Sessel sitzen? (24)

Lösung:

geordnete Vollerhebung

$n! = 4! = 24$

Aufgabe 114:

Jemand hat die aus massivem Gold hergestellten Ziffern 1, 9, 8 und 7 geerbt; wie viele verschiedene vierstellige Zahlen kann er bilden? (24)

Lösung:

geordnete Vollerhebung

$n! = 4! = 24$

Aufgabe 115:

Auf wie viele Arten können die Buchstaben des Wortes „AFFE“ angeordnet werden? (12)

Lösung:

geordnete Vollerhebung mit k nicht unterscheidbaren Elementen

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

Aufgabe 116:

In einer Schachtel befinden sich 4 gute und 4 schlechte Äpfel. Wie viele Möglichkeiten gibt es bei zufälliger Auswahl, wenn jeweils 4 gute und 4 schlechte nicht unterscheidbar sind? (70)

Lösung:

geordnete Vollerhebung mit k nicht unterscheidbaren Elementen

$$\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$$

Aufgabe 117:

Wie viele 4-stellige Zahlwörter (in Dezimalschreibweise) bestehen aus lauter verschiedenen Ziffern (0 bis 9 zugelassen)? (5.040)

Lösung:

geordnete Stichprobe ohne zurücklegen.

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{(10-4)!} = 5.040$$

Aufgabe 118:

Auf wie viele Arten kann man 36 Spielkarten auf 4 Spieler verteilen? ($2{,}14 \cdot 10^{19}$)

Lösung:

Ohne Reihenfolge und ohne zurücklegen

$$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9} = 2{,}14 \cdot 10^{19}$$

Aufgabe 119:

In einer Mathematik-Klausur werden 10 Aufgaben gestellt. Die Klausur wird bestanden, wenn die ersten drei Aufgaben und mindestens 4 der verbleibenden Aufgaben richtig gelöst werden. Auf wie viel verschiedene Arten lässt sich die Minimalforderung erfüllen? (35)

Lösung:

$$\binom{n}{k} = \binom{3}{3} \cdot \binom{7}{4} = 35$$

Aufgabe 120:

Einer Gruppe von 15 Schülern werden 3 Theaterkarten angeboten. Auf wie viele Arten können die Karten verteilt werden, wenn sich die Karten auf nummerierte Sitzplätze beziehen und jeder Schüler nur eine Karte bekommen kann? (2730)

Lösung:

Durch die nummerierten Sitzplätze ergibt sich eine Reihenfolge ohne zurücklegen.

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{15!}{(15-3)!} = 2730$$

Aufgabe 121:

Aus einer Schulklasse von 23 Schülern soll eine Abordnung von 5 Schülern zum Direktor geschickt werden. (33.649)

Auf wie viele Arten kann diese Abordnung gebildet werden?

Lösung:

Ungeordnete Stichprobe ohne zurücklegen

$\binom{23}{5} = 33.649$

Aufgabe 122:

Für das Elfmeterschießen muss der Trainer 5 der 11 Spieler auf dem Platz benennen. Wie viele Möglichkeiten hat er bei

a) der Bestimmung der Kandidaten? (462)

b) der Bestimmung der Reihenfolge der Schützen, nachdem die Kandidaten gewählt wurden? (120)

Lösung:

a) Ungeordnete Stichprobe ohne zurücklegen

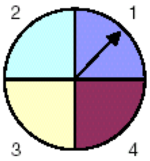
$\binom{11}{5} = 462$

b) Geordnete Vollerhebung

$5! = 120$

Aufgabe 123:

Das Glücksrad in der Abbildung wird zweimal gedreht. Beide Ziffernergebnisse bilden eine zweistellige Zahl.



Bewerten Sie die folgenden Aussagen und kreuzen Sie an:

	richtig	falsch
a) Die Zahl 44 hat die größte Chance.		
b) Die Zahl 11 hat die geringste Chance.		
c) Die Chance für die Zahl 11 ist kleiner als für die Zahl 23.		
d) Die Chance für alle so erhaltenen 2-stelligen Zahlen ist gleich groß.		

Lösung: a)falsch, b)falsch, c)falsch, d)richtig

Aufgabe 124:

Sechs Dozenten treffen sich zum Statistik-Stammtisch im Cafè Neckarblick. In wie viel verschiedenen Reihenfolgen können sie sich an die Theke setzen? (720)

Lösung:

Geordnete Vollerhebung:

$6! = 720$

Aufgabe 125:

Für zehn verschiedene Fertigungsmaschinen stehen zehn verschiedene innerbetriebliche Standorte zur Verfügung. Wie groß ist die Anzahl der möglichen Kombinationen, wenn jeder Standort unterschiedliche Rahmenbedingungen bereitstellt und es gilt diese 10 unterschiedlichen Maschinen an diesen unterschiedlichen Standorten zu platzieren? (3.628.800)

Lösung:

Geordnete Vollerhebung

10!=3.628.800

Aufgabe 126:

10 verschiedene Personen sollen in einer Reihe aufgestellt werden. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es? (3.628.800)

Lösung:

10! = 3628800 (geordnete Vollerhebung)

Aufgabe 127:

Auf wie viele Arten kann ein Ausschuss mit 3 Männern und 2 Frauen aus 7 Männern und 5 Frauen gebildet werden? (350)

Lösung:

Die Männer können aus den 7 auf

$$\binom{7}{3}$$

und die 2 Frauen aus den 5 auf

$$\binom{5}{2}$$

Arten ausgewählt werden.

Also gibt es:

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 350$$

Möglichkeiten für die Zusammensetzung des Ausschusses.

Aufgabe 128:

Wie viele dreistellige Zahlen kann man mit Hilfe der sechs Ziffern 2, 3, 5, 6, 7 und 9 bilden, wenn man keine der Zahlen zurücklegt? (120)

Lösung:

Es gibt $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ Möglichkeiten.

Aufgabe 129:

Einer Gruppe von 15 Schülern werden 3 Theaterkarten angeboten. Auf wie viele Arten können die Karten verteilt werden, wenn sich die Karten auf nummerierte Sitzplätze beziehen und jeder Schüler nur eine Karte bekommen kann? (2730)

Lösung:

Mit Reihenfolge ohne zurücklegen

Aufgabe 130:

Einer Gruppe von 15 Schülern werden 3 Theaterkarten angeboten. Auf wie viele Arten können die Karten verteilt werden, wenn sich die Karten auf nichtnummerierte Stehplätze beziehen und jeder Schüler nur eine Karte bekommen kann? (455)

Lösung:

Ohne Reihenfolge und ohne zurücklegen

$\binom{15}{3} = 455$

Aufgabe 131:

Einer Gruppe von 15 Schülern werden 3 Theaterkarten angeboten. Auf wie viele Arten können die Karten verteilt werden, wenn sich die Karten auf nichtnummerierte Stehplätze beziehen und jeder Schüler mehrere Karten bekommen kann? (680)

Lösung:

Ohne Reihenfolge und mit zurücklegen

$\binom{15+3-1}{3} = 680$

Aufgabe 132:

Einer Gruppe von 15 Schülern werden 3 Theaterkarten angeboten. Auf wie viele Arten können die Karten verteilt werden, wenn sich die Karten auf nichtnummerierte Stehplätze beziehen und jeder Schüler mehrere Karten bekommen kann? (680)

Lösung:

Ohne Reihenfolge und mit zurücklegen

$\binom{15+3-1}{3} = 680$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 133:

Die vier Teilnehmer einer Netzwerkparty haben kurz nach Mitternacht bei einem Pizzaservice 4 Pizzen bestellt, es ist ihnen aber egal welche Sorte geliefert wird. Der Pizza-Service hat sieben verschiedene Sorten zur Auswahl. Wie viele Zusammenstellungen der vier Pizzen sind möglich?

Lösung:

Mit zurücklegen und ohne Reihenfolge.

$$\binom{7+4-1}{4} = \binom{10}{4} = 210 \text{ Möglichkeiten}$$

Aufgabe 134:

Ein Hersteller von Modelleisenbahnen bietet seinen Kunden einen speziellen Zug an, für den es sechs verschiedene Waggontypen gibt. unter wie vielen Wagonzusammenstellungen kann der Kunde wählen, wenn er

a) Sechs Waggons kaufen möchte,

b) wenn er vier Waggons kaufen möchte.

Lösung:

a) mit Reihenfolge mit zurücklegen

$$6^6 = 46.656$$

b) mit Reihenfolge mit zurücklegen

$$6^4 = 1.296$$

Aufgabe 135:

In einem Büro ist eine Regalwand aus den Regalelementen A, B, C und D aufzustellen. Dabei ist das Element A 3-mal, das Element B 2-mal und die Elemente C und D jeweils 1-mal vorhanden. Wie viele Aufstellungsmöglichkeiten gibt es?

Lösung:

Geordnete Vollerhebung mit p, q gleichen Elementen

$$\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420 \text{ Möglichkeiten}$$

Aufgabe 136: (11)

a) (3) Wie viele dreistellige Zahlen kann man mit den sechs Ziffern 2, 3, 5, 6, 7, und 9 bilden?

b) (2) Wie viele sind davon Kleiner als 400?

c) (2) Wie viele sind gerade?

d) (2) Wie viele sind ungerade?

e) (2) Wie viele sind durch 5 teilbar?

Lösung:

a)

Mit Reihenfolge und mit zurücklegen.

$n^k = 6^3 = 216$ Möglichkeiten

b)

Mit Reihenfolge und mit zurücklegen.

Die erste Ziffer muss kleiner als 4 sein, also 2 oder 3.

$2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ Möglichkeiten

c)

Mit Reihenfolge und mit zurücklegen.

Die letzte Ziffer muss entweder eine 2 oder eine 6 sein

$6 \cdot 6 \cdot 2 = 72$ Möglichkeiten

d)

Mit Reihenfolge und mit zurücklegen.

$216 - 72 = 144$ Möglichkeiten

e)

Mit Reihenfolge und mit zurücklegen.

$6 \cdot 6 \cdot 1 = 36$ Möglichkeiten

Aufgabe 137:

Acht Personen warten vor dem Selbstbedienungsbuffet.

a) Auf wie viele Arten kann die Schlange zusammengesetzt sein?

b) Drei der acht Personen wählen das Fischgericht. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl dieser drei Personen?

Lösungen:

a)

8 Personen für den 1. Platz
und
7 Personen für den 2. Platz
und
6 Personen für den 3. Platz
und
5 Personen für den 4. Platz
und
4 Personen für den 5. Platz
und
3 Personen für den 6. Platz
und
2 Personen für den 7. Platz
und
1 Person für den 8. Platz

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40\,320$$

b)

Aus 8 Personen 3 Personen auswählen: $\binom{8}{3} = 56$

Aufgabe 138:

Beantworten Sie folgende Fragen, beachten Sie bitte, dass an der ersten Stelle keine Nullstehen darf.

a) Wie viele 5-stellige Zahlen gibt es?

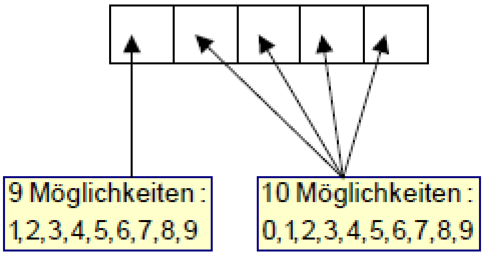
b) Wie viele 8-stellige Zahlen, die nur aus geraden Ziffern bestehen, gibt es?

c) Wie viele 8-stellige Zahlen, die nur aus ungeraden Ziffern bestehen, gibt es?

d) Wie viele 5-stellige Zahlen gibt es, die nur aus verschiedenen Ziffern bestehen?

Lösung:

(1) Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es ?



Man muß beachten, daß eine echte fünfstellige Zahl als erste Ziffer keine 0 haben darf, daher ist die erste Ziffer bei solchen Aufgaben stets anders zu behandeln !

Zahl der Möglichkeiten: $m = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4 = 90.000$

(2) Wie viele 8-stellige Zahlen, die nur aus geraden Ziffern bestehen, gibt es ?

Für die erste Ziffer haben wir 4 Möglichkeiten: 2, 4, 6, 8, für die restlichen 7 Ziffern jeweils 5 Möglichkeiten: 0, 2, 4, 6, 8. Also erhalten wir

$$m = 4 \cdot 5^7 = 312.500$$

(3) Wie viele 8-stellige Zahlen, die nur aus ungeraden Ziffern bestehen, gibt es ?

Da jetzt die Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 in Frage kommen, haben alle 7 Stellen diese 5 Möglichkeiten und man erhält:

$$m = 5^8 = 390.625$$

(4) Wie viele 5-stellige Zahlen gibt es, die nur aus verschiedenen Ziffern bestehen ?

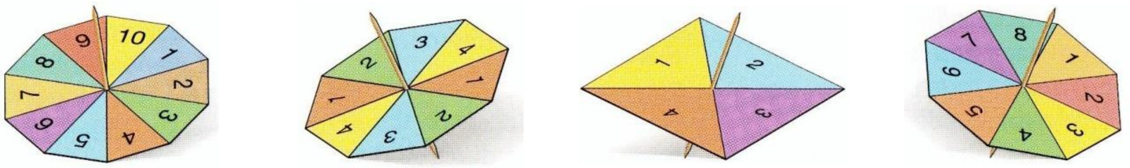
Für die erste Ziffer haben wir 9 Möglichkeiten (die Null wird ausgeschlossen), für die zweite Stelle haben wir 10 Möglichkeiten außer der Ziffer, die an erster Stelle steht, also 9, dann 8, dann 7 usw.:

$$m = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$$

Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 139:

Glückskreisel



Die oben abgebildeten Glückskreisel werden gedreht.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für jede Zahl der einzelnen Kreisel an.

Lösung:

Beim ersten Kreisel ist die Wahrscheinlichkeit für jede einzelne Zahl 0,1.

Beim zweiten Kreisel ist die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Zahl 0,25.

Beim dritten Kreisel ist die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Zahl 0,25.

Beim vierten Kreisel ist die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Zahl 0,125.

Aufgabe 140:

Gegeben seinen 100 Lose, von denen 2 Hauptgewinne, 8 Einzelgewinne und 90 Nieten sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 15 zufällig gezogenen Losen genau 3 Einzelgewinne und 12 Nieten sind.

Lösung:

Anz. der Möglichkeiten aus den 2 Hauptgewinnen genau 0 zu ziehen:

$$\binom{2}{0} = 1$$

Anzahl der Möglichkeiten aus den 8 Einzelgewinnen genau 3 zu ziehen:

$$\binom{8}{3}$$

Anzahl der Möglichkeiten aus den 90 Nieten genau 12 zu ziehen:

$$\binom{90}{12}$$

Anzahl der Möglichkeiten aus den insg. 100 Losen genau 15 zu ziehen:

$$\binom{100}{15}$$

Also ergibt sich insgesamt:

$$\frac{\binom{2}{0}\binom{8}{3}\binom{90}{12}}{\binom{100}{15}} = \frac{\binom{8}{3}\binom{90}{12}}{\binom{100}{15}} \approx 0{,}06054$$

Aufgabe 141:

Gegeben seinen 100 Lose, von denen 2 Hauptgewinne, 8 Einzelgewinne und 90 Nieten sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 10 zufällig gezogenen Losen genau 1 Hauptgewinn, 2 Einzelgewinne und 7 Nieten sind.

Lösung:

Anzahl der Möglichkeiten aus den 2 Hauptgewinnen genau 1 zu ziehen:

$$\binom{2}{1}$$

Anzahl der Möglichkeiten aus den 8 Einzelgewinnen genau 2 zu ziehen:

$$\binom{8}{2}$$

Anzahl der Möglichkeiten aus den 90 Nieten genau 7 zu ziehen:

$$\binom{90}{7}$$

Anzahl der Möglichkeiten aus den insg. 100 Losen genau 10 zu ziehen:

$$\binom{100}{10}$$

Also ergibt sich insgesamt:

$$\frac{\binom{2}{1}\binom{8}{2}\binom{90}{7}}{\binom{100}{10}} \approx 0{,}02417$$

Aufgabe 142:

Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt (K) sei 0,52, für eine Mädchengeburt (M) dementsprechend 0,48. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die Geburtenfolge? (a) 6,75%, b) 5,75%)

a) KKMK bzw. KMKK

b) MMMK bzw. KMMM?

Lösung:

a) $0{,}52 \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}52 = 0{,}52 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}52 = 0{,}0675$

b) $0{,}48 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}52 = 0{,}52 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}48 \cdot 0{,}48 = 0{,}0575$

Aufgabe 143:

Wie groß ist bei zufälliger Wahl die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 10 Mädchen und 15 Burschen

a) beide Klassensprecher Mädchen sind? (0,15)

b) beide Klassensprecher Burschen sind? (0,35)

Lösung:

a)

$$P(M) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{45}{300} = \frac{9}{60} = 0{,}15$$

b)

$$P(M) = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{105}{300} = \frac{21}{60} = 0{,}35$$

Aufgabe 144:

Die Zwillinge Peter und Paul sind wieder einmal für die Stundenwiederholung in Mathematik nicht vorbereitet. Sie wissen, dass der Lehrer dafür stets 2 Schüler zufällig auswählt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) sowohl Peter als auch Paul,

b) Peter, aber nicht Paul,

c) Paul, aber nicht Peter,

d) Peter,

e) Paul,

f) weder Peter noch Paul

zur Stundenwiederholung drankommen, wenn insgesamt 20 Schüler anwesend sind? (a) 0,005263 b) 0,0947 c) 0,0947 d) 0,1 e) 0,1 f) 0,8053)

Lösung:

a)

$$\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{18}{0}}{\binom{20}{2}} = 0{,}0053$$

b)

$$\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{0}\cdot\binom{18}{1}}{\binom{20}{2}} = 0{,}0947$$

c)

$$\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{0}\cdot\binom{18}{1}}{\binom{20}{2}} = 0{,}0947$$

d)

$$\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{19}{1}}{\binom{20}{2}} = 0{,}1$$

e)

$$\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{19}{1}}{\binom{20}{2}} = 0{,}1$$

f) Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten mit Peter und Paul

$$\frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{18}{2}}{\binom{20}{2}} = 0{,}8053$$

Aufgabe 145:

Eine Familie hat zwei Kinder. Die Geburtswahrscheinlichkeit für Jungen und Mädchen sei 0,5. Jungen- und Mädchengeburten seinen unabhängig voneinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Jungen sind, wenn

a) keine sonstigen Angaben vorliegen; (0,25)

b) bekannt ist, dass ein Kind ein Junge ist; (0,33)

c) bekannt ist, dass das älteste Kind ein Junge ist(0,5).

(Geburtsreihenfolge beachten)

Lösung:

Es gibt 4 gleichmögliche Fälle: (J,J); (J,M); (M,J); (M,M)

a) Fall 1 günstig, alle 4 Fälle möglich W(J,J) 1/4

b) Fall 1 günstig, die ersten 3 Fälle möglich W(J,J) = 1/3

c) Fall 1 günstig, die ersten 2 Fälle möglich W(J,J) = ½

Aufgabe 146:

Ein Student muss in einer Klausur 8 von 10 Fragen richtig beantworten.

(a) Wie viel Möglichkeiten hat er? (45)

(b) Wie viele sind es, wenn er die ersten 3 Fragen richtig beantworten muss? (21)

(c) Wenn er mindestens 4 der ersten 5 Fragen richtig beantwortet? (35)

Lösung:

(a) Die 8 Fragen können auf

$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$Arten ausgewählt werden.

(b) Wenn er die ersten drei Fragen richtig beantwortet hat, gibt es für die restlichen noch

$\binom{7}{5} = 21$Möglichkeiten

(c) Wenn er die ersten Fragen richtig beantwortet, gibt es für die restlichen noch

$\binom{5}{3} = 10$Möglichkeiten.

Beantwortet er nur 4 der ersten 5 Fragen richtig, wofür es

$\binom{5}{4} = 5$Möglichkeiten gibt, so kann er die 4 anderen Fragen aus den restlichen 5 auf

$\binom{5}{4} = 5$ Arten auswählen.

Also hat er in diesem Fall $5 \cdot 5 = 25$ Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es demnach 35 Möglichkeiten.

Aufgabe 147:

Aus einem Skatspiel werden nacheinander zwei der der 32 Karten gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den beiden gezogenen Karten genau ein As befindet? (0,2258)

Lösung:

Die Gesamtanzahl der möglichen Ausgänge ist

$$\binom{32}{2} = 496$$

Es gibt

$$\binom{4}{1}$$

Möglichkeiten, ein As zu ziehen und dazu jeweils

$$\binom{28}{1}$$

Möglichkeiten, eine weitere Karte zu ziehen, die kein As ist.

Das betrachtete Zufallsergebnis tritt also bei

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{1} = 112$$

Ausgängen ein, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$P(\text{ein As}) = \frac{112}{496}$$

Aufgabe 148:

(a) Auf wie viele Arten können 3 Jungen und 2 Mädchen in einer Reihe sitzen? (120)

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Jungen und auch die Mädchen zusammen sitzen möchten. (24)

Lösung:

(a) Für die fünf Personen gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten.

(b) Aufgeteilt nach Geschlecht gibt es 2 Möglichkeiten: JJJMM oder MMJJJ.

In beiden Fällen können die Jungen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ und die Mädchen $2 \cdot 1 = 2$ Sitzordnungen bilden.

Insgesamt haben wir $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ mögliche Sitzanordnungen.

Aufgabe 149:

5 Personen, 2 männliche m_1 und m_2 und 3 weibliche w_1, w_2 und w_3, bestreiten ein Schachturnier. Die Personen gleichen Geschlechts besitzen die gleichen Gewinnwahrscheinlichkeiten, und es ist doppelt so wahrscheinlich, dass ein Mann gewinnt, als dass eine Frau gewinnt.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt eine Frau das Turnier? (0,4286)

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt m_1 oder w_1 das Turnier? (0,4286)

Lösung:

Es sei P(w1)= P(w2)= P(w3)=p und P(m1)= P(m2)=2p. Da die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt, folgt

$$p + p + p + 2p + 2p = 1 \; oder \; p = \frac{1}{7}$$

Wir suchen

(a) P({w1,w2,w3})=P(w1)+ P(w2)+ P(w3)=$\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

(b) P({m1,w1})=P(m1)+P(w1)=$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{7}$

Aufgabe 150:

Zwei Karten werden zufällig aus einem Rommé-Spiel (52 Karten) gezogen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass (a) beide Karos sind (0,0588), (b) eine Karo und eine Herz ist (0,0589; 0,1275).

Lösung:

Es gibt

$$\binom{52}{2} = 1326$$

Möglichkeiten, 2 Karten aus 52 zu ziehen.

(a) Es gibt

$$\binom{13}{2}$$

Möglichkeiten, 2 Karos aus 13 Karo zu ziehen:

$$P(A) = \frac{78}{1326}$$

(b) Da es 13 Karo und 13 Herz gibt, erhalten wir $13 \cdot 13 = 169$ Möglichkeiten, ein Karo und ein Herz zu ziehen:

$$P(B) = \frac{169}{1326} = \frac{13}{102}$$

Aufgabe 151:

Drei Glühbirnen werden zufällig aus 15 Glühbirnen, von denen 5 defekt sind, ausgewählt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass

(a) keine (0,2637),

(b) genau eine (0,4945),

(c) mindestens eine der 3 defekt ist (0,7363).

Lösung:

Es gibt

$$\binom{15}{3} = 455$$

Möglichkeiten, 3 Glühbirnen aus 15 auszuwählen.

(a) Da 15-5=10 nicht defekt sind, gibt es

$$\binom{10}{3} = 120$$

Möglichkeiten, 3 nicht defekte auszuwählen:

$$P(A) = \frac{120}{455}$$

(b) Wir haben 5 defekte und

$$\binom{10}{2} = 45$$

verschiedene Paare von nicht defekten Glühbirnen, also gibt es $5 \cdot 45 = 225$ Möglichkeiten, 3 auszuwählen, von denen genau eine defekt ist:

$$P(A) = \frac{225}{455}$$

(c) Das betrachtete Ereignis ist das Gegenereignis des Ereignisses in (a), also gilt:

$$P(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{120}{455} = \frac{335}{455}$$

Aufgabe 152:

Aus 10 Kärtchen, die von 1 bis 10 durchnummeriert sind, werden 2 zufällig gezogen. Bestimme die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass die Summe der beiden darauf stehenden Zahlen ungerade ist, wenn

(a) beide zusammen (0,5556),

(b) eine nach der anderen ohne zurücklegen (0,5556),

(c) eine nach der anderen mit zurücklegen gezogen wird (0,5).

Lösung:

(a) Es gibt

$$\binom{10}{2} = 45$$

Möglichkeiten, 2 Kärtchen aus 10 auszuwählen (ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen).

Die betrachtete Summe ist ungerade, wenn die eine Zahl gerade und die andere ungerade ist. Da wir 5 Gerade und 5 ungerade Zahlen haben, gibt es $5 \cdot 5 = 25$ Möglichkeiten, dass die Summe ungerade ist:

$$P(A) = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

(b) Wir haben jetzt eine geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen mit

$$\frac{10!}{8!} = 90$$

beide Kärtchen zu ziehen.

Es gibt 25 Möglichkeiten, zuerst eine gerade Zahl und dann eine ungerade Zahl zu ziehen, sowie 25 für den umgekehrten Fall:

$$P(B) = \frac{25 + 25}{90}$$

(c) $10 \cdot 10 = 100$ Möglichkeiten des Ziehens mit Zurücklegen. Wie unter (b) erhalten wir $25 + 25 = 50$ günstige Fälle:

$$P(C) = \frac{25 + 25}{100} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 153:

Zwei homogene Würfel werden geworfen. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit p dafür an, dass die Summe 10 oder größer ist, wenn eine 5 auf

(a) dem ersten (0,3333),

(b) mindestens einem Würfel erscheint (0,2727).

Lösung:

(a) Erscheint eine 5 auf dem ersten Würfel, dann erhalten wir als reduzierten Stichprobenraum

$$\mathrm{A} = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\}.$$

Für das betrachtete Ereignis gibt es dann also 2 günstige Fälle:

$$(5,5),(5,6).$$

Also

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(b) Erscheint mindestens auf einem der Würfel eine 5, dann erhält man wieder einen reduzierten Stichprobenraum mit 11 Elementen:

$$\mathrm{B} = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(6,5)\}.$$

Drei Fälle sind günstig:

$$(5,5),(6,5),(5,6).$$

Also

$$P(B) = \frac{3}{11}$$

Aufgabe 154:

Drei homogene Münzen werden geworfen. Bestimme sie Wahrscheinlichkeit p, dass bei allen Zahl oben liegt, wenn dies bei

(a) der ersten (0,25),

(b) mindestens einer der Münzen dies der Fall ist (0,1429).

Lösung:

Der Stichprobenraum hat 8 Elemente:

$$\mathrm{S} = \{\mathrm{ZZZ}, \mathrm{ZZW}, \mathrm{ZWZ}, \mathrm{ZWW}, \mathrm{WZZ}, \mathrm{WZW}, \mathrm{WWZ}, \mathrm{WWW}\}$$

(a) In diesem Fall ist der reduzierte Stichprobenraum durch

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{ZZZ}, \mathrm{ZZW}, \mathrm{ZWZ}, \mathrm{ZWW}\}$$

gegeben. Da wir einen günstigen Fall bei vier möglichen haben, folgt

$P(A)=\frac{1}{4}$

(b) Hier ist der reduzierte Stichprobenraum gleich

$B=\{ZZZ, ZZW, ZWZ, ZWW, WZZ, WZW, WWZ\}$.

Also ergibt sich

$P(B)=\frac{1}{7}$

Aufgabe 155:

Zwei homogene Würfel werden geworfen, und man erfährt, dass die beiden oben liegenden Zahlen verschieden sind. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit p an, dass

(a) die Augensumme 6 ist (0,1333),

(b) eine 1 erscheint (0,3333),

(c) die Augensumme 4 oder weniger beträgt (0,1333).

Lösung:

Von den 36 möglichen Ergebnissen des Wurfs scheiden die 6 mit gleicher Augenzahl aus. Also hat der reduzierte Stichprobenraum 30 Elemente.

(a) Für die Augensumme 6 gibt es 4 Möglichkeiten: (1,5), (2,4), (4,2), (5,1). (Die Möglichkeit (3,3) fällt ja weg. Also gilt

$P(A)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

(b) Für eine 1 haben wir 10 Möglichkeiten: (1,2),(1,3),(1,4), (1,5), (1,6) und (2,1), (3,1), (4,1),(5,1), (6,1). Daraus folgt:

$P(B)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

(c) Das betrachtete Ereignis kann auf 4 Arten eintreten: (3,1), (1,3), (2,1), (1,2).

Also

$P(C)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

Aufgabe 156:

Ein Mann bekommt aus einem normalen Kartenspiel mit 52 Karten 4 Karo und dann noch 3 Karten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass mindestens eine dieser Karten ein Karo ist? (0,4716)

Lösung:

Da er bereits 4 Karo hat, bleiben 52-4=48 Karten übrig, von denen 13-4=9 Karo sind. Die nächsten 3 Karten kann er auf

$\binom{48}{3} = 17.296$

Arten bekommen. Da noch 48-9=39 Nicht-Karo da sind, kann er auf

$\binom{39}{3} = 9.139$

Arten 3 Nicht-Karo bekommen. Also ist die Wahrscheinlichkeit q, kein weiteres Karo zu bekommen:

$$P(A) = \frac{9.139}{17.296}$$

damit folgt

$$P(B) = 1 - \frac{9.139}{17.296} = \frac{8.157}{17.296}$$

Aufgabe 157:

Vier Personen, genannt Nord, Ost, Süd und West, erhalten je 13 Karten von einem normalen Kartenspiel mit 52 Karten.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass Nord genau 2 Asse hat, wenn Süd keines hat? (0,3082)

(b) Nord und Süd haben zusammen 9 Herz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass Ost und West genau je 2 Herz haben? (0,4070)

Lösung:

(a) Nord, Ost und West bekommen zusammen 39 Karten, darunter 4 Asse. Nord kann 13 der 39 Karten auf

$\binom{39}{13}$ Arten erhalten, sowie 2 der 4 Asse auf

$\binom{4}{2}$ Arten.

Für seine 11 restlichen Nicht-Asse (von insgesamt 39-4=35 Karten) gibt es

$\binom{35}{11}$ Möglichkeiten. also folgt:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{35}{11}}{\binom{39}{13}} = \frac{650}{2.109}$$

(b) Auf Ost und West werden 26 Karten verteilt, darunter 4 Herz. Es gibt

$\binom{26}{13}$ Möglichkeiten, Ost 13 Karten zu geben. (wir brauchen nur Ost zu betrachten, da West dann die restlichen Karten erhält.)

Es gibt

$\binom{4}{2}$ Arten, dass Ost 2 der 4 Herz bekommt, und $\binom{22}{11}$ Möglichkeiten,

dass er 11 der 26-4=22 Nicht Herz erhält. Also:

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{22}{11}}{\binom{26}{13}} = \frac{234}{575}$$

Aufgabe 158:

In einer Gruppe sind 12 Jungen und 4 Mädchen. Es werden 3 Personen zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass es 3 Jungen sind? (0,3929)

Lösung:

Man kann auf $\binom{16}{3} = 560$ Arten 3 Personen aus 16 auswählen, sowie auf $\binom{12}{3} = 220$ Arten 3 Jungen; damit folgt:

$$P(A) = \frac{220}{560}$$

Aufgabe 159:

Ein Mann bekommt nacheinander 5 Karten aus einem normalen Kartenspiel mit 52 Karten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass alle Kreuz sind? (0,000495)

Lösung:

Die Anzahl der gesamten Möglichkeiten beträgt: $\binom{52}{5}$

Die Anzahl der günstigen Möglichkeiten beträgt: $\binom{13}{5}$

Somit ergibt sich eine Gesamtwahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{33}{66.640}$$

Aufgabe 160:

Zur Führerscheinprüfung werden die Personen einer Gruppe nacheinander zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p, dass abwechselnd ein Mann und eine Frau geprüft werden, wenn

(a) 4 Männer und 3 Frauen (0,0286),

(b) 3 Männer und 3 Frauen da sind (0,1).

Lösung:

(a) Zuerst wird eine Frau ausgewählt, dann ist das betrachtete Ereignis unmöglich.

Andererseits ist die Wahrscheinlichkeit, einen Mann als ersten Prüfling auszuwählen, gleich $\frac{4}{7}$. Ist der erste ein Mann, so ergibt sich $\frac{3}{6}$ als Wahrscheinlichkeit, dass der zweite eine Frau ist, da unter den restlichen 6 Personen noch drei Frauen sind. (usw.)

$$\mathrm{P} = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{35}$$

(b) Es gibt zwei sich ausschließende Möglichkeiten: Zuerst ein Mann oder zuerst eine Frau. Ist der erste Prüfling ein Mann, dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeit P1 für das betrachtete Ereignis mit dem Multiplikationssatz:

$$\mathrm{P}_1 = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{20}.$$

Ist der erste Prüfling eine Frau, erhalten wir die analoge Wahrscheinlichkeit P2.

Also $P = P_1 + P_2 = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Aufgabe 161:

Karton A enthält 8 Glühbirnen von denen 3 defekt sind, Karton B enthält 5, darunter 2 defekte. Jedem Karton wird zufällig eine Glühbirne entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass

(a) beide Glühbirnen defekt sind (0,15),

(b) eine defekt und eine nicht defekt ist (0,475).

Lösung:

(a) Die Wahrscheinlichkeit, zwei defekte Glühbirnen zu entnehmen, ist

$$P = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{20}.$$

(b) Die Wahrscheinlichkeit eine nicht defekte und eine defekte Glühbirne zu erhalten ergibt sich aus:

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5} = \frac{10}{40} + \frac{9}{40} = \frac{19}{40}$$

Aufgabe 162:

Von 20 gelieferten Glühbirnen sind 4 defekt. Es wird eine Stichprobe mit drei Birnen entnommen (ohne Zurücklegen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) keine defekte Birne in der Stichprobe (0,4912)

b) mindestens eine defekte Birne in der Stichprobe (0,5088)

Lösung:

Da die Anordnung der Stichprobe keine Rolle spielt und die Proben nicht zurückgelegt werden, wird mit Kombinationen ohne Wiederholung gerechnet.

a) Mögliche Kombinationen $\binom{20}{3} = 1.140$

günstige Kombinationen $\binom{16}{3} = 560$

$$\text{P(keine defekte Lampe in der Probe)} = \frac{560}{1.140} = 0{,}4912$$

b) $\text{P(mindestens eine defekte)} = 1 - \frac{560}{1.140} = 0{,}5088$

Aufgabe 163:

Eine Lieferung von 20 Bauelementen enthält 10% Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Stichprobe vom Umfang n=3 ausschließlich einwandfreie Bauelemente enthält? (0,7158)

Lösung:

Die 20 Bauelemente bestehen aus 18 "guten" und 2 "schlechten".

günstige Kombinationen $\binom{18}{3}$

mögliche Kombinationen $\binom{20}{3}$

Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{\binom{18}{3}}{\binom{20}{3}} = 0{,}7158$

Aufgabe 164:

Die Tabelle zeigt Frauen und Männer einer Firma, unterteilt in Raucher und Nichtraucher.

	B: Frauen	$\bar{B}$: Männer	Summe
A: Raucher	200	800	1000
$\bar{A}$: Nichtraucher	300	200	500
Summe	500	1000	1500

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit jemanden anzutreffen der raucht. (0,66)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eine Frau anzutreffen. (0,33)

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eine Raucherin anzutreffen. (0,133)

d) Sie Treffen eine Frau an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie Raucherin? (0,4)

Lösung

Um die Wahrscheinlichkeiten bestimmen zu können, benötigen wir die relativen Häufigkeiten der Ereignisse. Im vorigen Beispiel gab es Rundungsfehler. Um diese möglichst zu vermeiden, sollte man die relativen Häufigkeiten und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten in Bruchform darstellen.

	B: Frauen	$\bar{B}$: Männer	Summe
A: Raucher	$\frac{200}{1500}=\frac{2}{15}$	$\frac{800}{1500}=\frac{8}{15}$	$\frac{1000}{1500}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$
$\bar{A}$: Nichtraucher	$\frac{300}{1500}=\frac{3}{15}$	$\frac{200}{1500}=\frac{2}{15}$	$\frac{500}{1500}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$
Summe	$\frac{500}{1500}=\frac{5}{15}$	$\frac{1000}{1500}=\frac{10}{15}$	$\frac{1500}{1500}=\frac{15}{15}=1$

a)

Die Wahrscheinlichkeit einen Raucher anzutreffen ist

$$P(A)=\frac{2}{3}\approx 0{,}666$$

b)

Die Wahrscheinlichkeit eine Frau anzutreffen ist

$$P(B)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}\approx 0{,}333$$

c)

Die Wahrscheinlichkeit eine Raucherin anzutreffen ist

$$P(A \cap B) = \frac{2}{15} \approx 0{,}133$$

d)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine angetroffene Frau Raucherin ist, ist

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{5}{15}} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Aufgabe 165:

Ein Statistisches Institut will ermittelt haben, dass bei 53% aller Geburten das Baby männlichen Geschlechtes ist.

Wie groß ist danach die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mutter aufeinanderfolgend 2 Jungen zur Welt bringt?

Lösung:

Urne mit 100 Kugeln.

53 blaue (für Jungen) und 47 rosa (für Mädchen).

Zweimal ziehen mit Zurücklegen.

Gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(b \mid b) = \frac{53}{100} \cdot \frac{53}{100}$$

$$= \frac{2809}{10000} \approx 0{,}2809$$

Aufgabe 166:

Im Lager einer Töpferei befinden sich 100 frisch gefertigte Tontöpfe. Man weiß, dass 20% davon fehlerhaft sind. Vier Tontöpfe werden zufällig entnommen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das die vier entnommenen Töpfe fehlerfrei sind? (0,4033)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das von den vier entnommenen Töpfen drei fehlerfrei sind? 0,4191)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das von den vier entnommenen Töpfen mindestens drei fehlerfrei sind? (0,8224)

Lösung:

Modell: Urne mit 20 roten (fehlerhaft) und 80 grünen (fehlerfrei) Kugeln. Viermal Ziehen ohne Zurücklegen. Das Baumdiagramm der Aufgabe 10 kann verwendet werden. Beachten Sie jedoch, dass die Wahrscheinlichkeiten der Pfade sich ändern.	
a)	A: Alle 4 Töpfe sind fehlerfrei. Das Baumdiagramm enthält einen Pfad, für den das Ereignis A zutrifft. $P(A)=\frac{80}{100}\cdot\frac{79}{99}\cdot\frac{78}{98}\cdot\frac{77}{97}\approx \underline{\underline{0{,}4033}}$
b)	B: Drei der vier entnommenen Töpfe sind fehlerfrei. Das Baumdiagramm enthält 4 Pfade, die für das Ereignis B relevant sind. $P(B)=4\cdot\frac{20\cdot 78\cdot 79\cdot 80}{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}\approx \underline{\underline{0{,}4191}}$
c)	C: Mindestens drei der vier entnommenen Töpfe sind fehlerfrei. Bedeutet drei oder mehr sind fehlerfrei. $P(C)=P(A)+P(B)=\frac{80}{100}\cdot\frac{79}{99}\cdot\frac{78}{98}\cdot\frac{77}{97}+4\cdot\frac{20\cdot 78\cdot 79\cdot 80}{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}\approx \underline{\underline{0{,}8224}}$

Aufgabe 167:

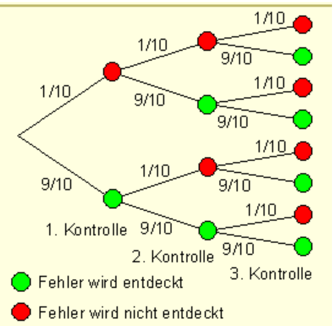
Bei einer Produktionskontrolle wird ein bestimmter Fehler in 10% der Fälle übersehen. Deshalb wird das Produkt von drei verschiedenen Personen kontrolliert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein unbrauchbares Produkt

a) Spätestens bei der 2. Kontrolle als unbrauchbar erkannt wird. (0,99)

b) Erst bei der 3. Kontrolle als unbrauchbar erkannt wird. (0,009)

c) Nicht als unbrauchbar erkannt wird. (0,001)

Lösung:



	Modell: Urne mit 1 roten (fehlerhaft) und 9 grünen (fehlerfrei) Kugeln. Dreimal Ziehen mit Zurücklegen. Begründung für mit Zurücklegen: Die Kontrollen geschehen unabhängig voneinander. Die Ausgangssituation vor jeder Kontrolle ist immer wieder die gleiche. (Übersehen des Fehlers 10%).
a)	A: spätestens bei der 2. Kontrolle erkannt. Bedeutet wird in der ersten oder in der zweiten Kontrolle erkannt. In der ersten Kontrolle erkannt: $P(1.)=\frac{9}{10}=0{,}9$ In der zweiten Kontrolle erkannt: $P(2.)=\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{100}=0{,}09$ $P(A)=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}=\underline{\underline{0{,}99}}$
b)	B: Erst bei der 3. Kontrolle erkannt. $P(B)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{1000}=\underline{\underline{0{,}009}}$
c)	C: wird nicht erkannt. $P(C)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{1000}=\underline{\underline{0{,}001}}$

Aufgabe 168:

In einer Fabrik wird Porzellangeschirr hergestellt. Jedes Teil wird nacheinander in verschiedenen Kontrollgängen auf Form, Farbe und Oberflächenbeschaffenheit geprüft. Erfahrungsgemäß muss bei 25% die Form beanstandet werden. Die Farbkontrolle passieren 85% der Teile ohne Beanstandung. In 20% aller Fälle genügt die Oberfläche nicht den Ansprüchen der 1. Wahl. Nur wenn alle drei Kontrollen ohne Beanstandung durchlaufen sind, kann ein Teil als 1. Wahl verkauft werden. Ein Teil ist 2. Wahl, wenn die Qualität an nur einer Kontrollstelle nicht ausreicht. Alle übrigen Porzellanteile gelten als Ausschussware.

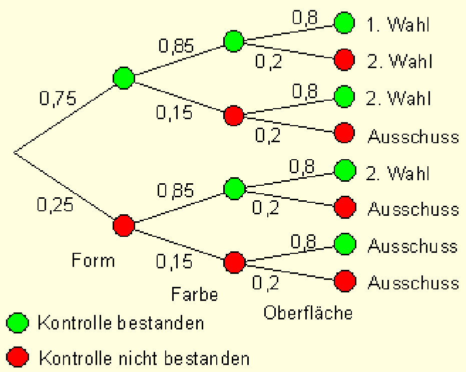
a) Stellen Sie die dreifache Kontrolle in einem Baumdiagramm dar.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil 1. Wahl ist? (0,51)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil 2. Wahl ist? (0,3875)

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil Ausschuss ist? (0,1025)

Lösung:

<table>
<tr><td>a)</td><td>
</td><td>1. Wahl:
$0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,8 = \underline{\underline{0,51}}$
2. Wahl:
$0,75 \cdot 0,85 \cdot 0,2 = 0,1275$
$0,75 \cdot 0,15 \cdot 0,8 = 0,09$
$0,25 \cdot 0,85 \cdot 0,8 = 0,17$
Ausschuss:
$0,75 \cdot 0,15 \cdot 0,2 = 0,0225$
$0,25 \cdot 0,85 \cdot 0,2 = 0,0425$
$0,25 \cdot 0,15 \cdot 0,8 = 0,03$
$0,25 \cdot 0,15 \cdot 0,2 = 0,0075$</td></tr>
<tr><td>b)</td><td colspan="2">$P(1.\text{Wahl}) = \underline{\underline{0,51}}$</td></tr>
<tr><td>c)</td><td colspan="2">$P(2.\text{Wahl}) = 0,1275 + 0,09 + 0,17 = \underline{\underline{0,3875}}$</td></tr>
<tr><td>d)</td><td colspan="2">$P(\text{Ausschuss}) = 0,0225 + 0,0425 + 0,03 + 0,0075 = \underline{\underline{0,1025}}$</td></tr>
</table>

Aufgabe 169:

In der Lotterie A gibt es von 10000 Losen 4500 Gewinne. in der Lotterie B sind unter 15000 Losen 9500 Gewinne. Jemand kauft von jeder Lotterie ein Los.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in beiden Lotterien gleichzeitig zu gewinnen? E1: Gewinn in beiden Lotterien. (0,285)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit nichts zu gewinnen? E2: Gewinn in keiner Lotterie? (0,202)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in mindestens einer Lotterie zu gewinnen? E3: Gewinn in mindestens einer Lotterie. (0,798)

Lösung:

a)	$P(A) = \frac{4500}{10000}$ $\quad P(B) = \frac{9500}{15000}$ $P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4500}{10000} \cdot \frac{9500}{15000} = \underline{\underline{0{,}285}}$
b)	Es liegt kein Gewinn vor, wenn man in Lotterie A und in Lotterie B nichts gewinnt. Dabei gilt: $\overline{A}$ Niete in Lotterie A $\quad \overline{B}$ Niete in Lotterie B $P(E_2) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{5500}{10000} \cdot \frac{5500}{15000} = \underline{\underline{0{,}202}}$
c)	E_3 ist das Gegenereignis von E_2 $P(E_3) = 1 - P(E_2) = 1 - 0{,}202 = \underline{\underline{0{,}798}}$

Aufgabe 170:

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kandidat im Examen die Note 2 erreicht, sei 0,4. Das Ereignis"8. Semester und Note 2" trete mit der Wahrscheinlichkeit 0,09 ein. Wie wahrscheinlich ist es dann, dass ein Student, der mit der Note 2 abgeschlossen hat, im 8. Semester ist? (0,225)

Lösung:

Wir wissen, dass Ereignis A

$A = \text{"Note 2"}$

bereits eingetreten. Ein Student hat mit der Note 2 abgeschlossen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zusätzlich Ereignis B

$B = \text{"8 Semester"}$

eintritt:

$P(A) = 0{,}4; P(A \cap B) = 0{,}09$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}09}{0{,}4} = 0{,}225.$$

Aufgabe 171:

Beim Würfelspiel „Fuchs und Hase“ wird mit einem roten und einem blauen Würfel zugleich geworfen. Der Fuchs darf um so viel Felder vorrücken, wie der rote Würfel Augen zeigt, der Hase um so viele Felder, wie der blaue Augen zeigt.

Der Hase hat drei Felder Vorsprung (zwei Felder sind dazwischen). Es wird einmal gewürfelt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Ereignisse:

a) Fuchs und Hase treffen auf dasselbe Feld

b) Der Fuchs überholt den Hasen

c) Der Hase vergrößert den Vorsprung

d) Der Fuchs nähert sich dem Hasen

Lösung:

$$a)\,\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$
$$b)\,\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$
$$c)\,\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$
$$d)\,\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

Aufgabe 172:

In einer Lostrommel liegen 20 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 20. Es wird eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer Kugel mit

a) einer ungeraden Zahl,

b) einer Primzahl,

c) einer Zahl kleiner als 4?

Lösung:

$$a)\,\frac{1}{2}$$
$$b)\,\frac{2}{5}$$
$$c)\,\frac{3}{20}$$

Aufgabe 173:

Aus einer Urne wird eine Kugel gezogen. Die Urne enthält

a) 10 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 10

b) 100 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 100.

Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl auf der gezogenen Kugel die Ziffer 5 nicht enthält (durch 5 teilbar ist).

Lösung:

$$a) \frac{9}{10} (\frac{1}{5})$$

$$b) \frac{81}{100} (\frac{1}{5})$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 174:

In einem Ufo befinden sich 12 blaue, 13 rote und 15 grüne Männchen. Eine Delegation von 3 Männchen besucht die Erde. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um drei grüne Männchen handelt?

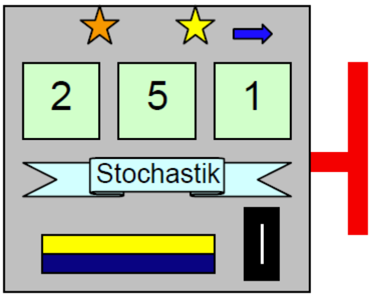
Lösung:

Es handelt sich hier um eine Hypergeometrische Verteilung.

$$P(3\text{ grüne Männchen}) = \frac{\binom{12}{0}\cdot\binom{13}{0}\cdot\binom{15}{3}}{\binom{40}{3}} = 0{,}0461$$

Aufgabe 175:

Ein Spielautomat enthält drei zylindrische Räder, die unabhängig voneinander laufen und anhalten können. Jedes Rad enthält auf der Außenfläche 20 Felder und zwar 12 Felder mit der Zahl 1, 6 mit der 2 und 2 mit der Zahl 5.



Der Automat wird 1-mal angeworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

A: die Zahl 555 erscheint (Hauptgewinn)

B: eine Zahl größer als 300 erscheint

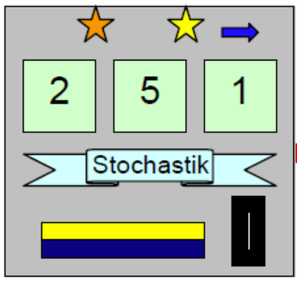
C: eine Zahl mit der Quersumme 8 erscheint,

D: mindestens eine 1 erscheint,

E (3): genau zwei gleiche Ziffern erscheinen.

Lösung:

Lösung 111



a) Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Ziffern sind $p(1) = 0{,}6$; $p(2) = 0{,}3$ und $p(5) = 0{,}1$.

A: $P(A) = 0{,}1^3 = 0{,}001$

B: Hier muss lediglich als erste Ziffer “5” erscheinen, die zweite und dritte Ziffer ist dann beliebig.
Daher folgt $P(B) = 0{,}1$.

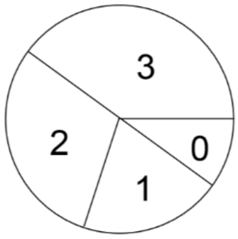
C: Eine Zahl aus den Ziffern 1, 2 und 5 hat genau dann die Quersumme 8, wenn jede dieser Ziffern genau einmal vorkommt. Diese drei Ziffen kann man auf 3! = 6 Arten anordnen, also gibt es 6 Zahlen mit der Quersumme 8.
$P(C) = 6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}108$

D:: Das Gegenereignis $\overline{D}$ lautet “keine Eins”.
$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}4^3 = 0{,}936$

E: $P(E) = 3 \cdot (0{,}6^2 \cdot 0{,}4 + 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1^2 \cdot 0{,}9) = 0{,}648$
Erklärung: Zweimal die “1” und dann keine “1” ergibt die Wahrscheinlichkeit $0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot ,9$ und dies noch mal 3, denn die “nicht-Eins” kann auf d drei verschiedenen Plätzen stehen usw.

Aufgabe 176:

Ein Glücksrad mit 4 Sektoren, in denen die Zahlen 0, 1, 2 und 3 stehen,



hat für die einzelnen Zahlen folgende Wahrscheinlichkeiten:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

a) Wie oft muss das Rad mindestens gedreht werden, damit mit mindestens 98% Wahrscheinlichkeit mindestens eine 1 erscheint?

b) Das Spiel „Blaues Auge“ hat folgende Regel: Das Rad wird einmal gedreht und die „gedrehte“ Zahl notiert. Ist diese Zahl 2 oder 3, wird nochmals gedreht, im Ganzen aber höchstens dreimal. Z sei die letzte erdrehte Zahl. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim dritten Mal drehen eine 2 oder eine 3 kommt.

Lösung:

a)

Wie oft muß das Rad mindestens gedreht werden, damit mit mindestens 98% Wahrscheinlichkeit mindestens eine 1 erscheint ?

Bedingung: $P(Y \geq 1) \geq 0{,}98$ d.h. $1 - P(Y = 0) \geq 0{,}98$

d.h. $P(Y = 0) \leq 0{,}02$

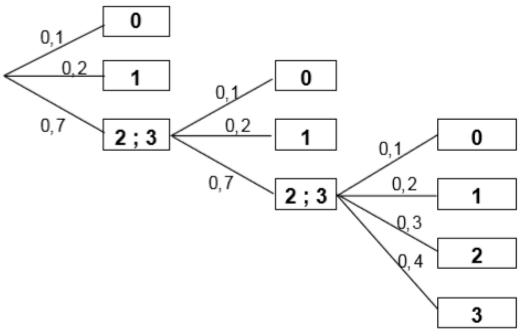
d.h. $0{,}8^n \leq 0{,}02 \quad |\lg$

$n \cdot \lg 0{,}8 \leq \lg 0{,}02 \quad |: \lg 0{,}8 < 0$!!!

$$n \geq \frac{\lg 0{,}02}{\lg 0{,}8} = 17{,}5$$

Ergebnis: Man muß mindestes 18 mal drehen.

b)



Wahrscheinlichkeitsverteilung für Z:

$$P(Z=0) = 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}219$$
$$P(Z=1) = 0{,}2 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}438$$
$$P(Z=2) = 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}147$$
$$P(Z=3) = 0{,}7^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}196$$

$$P(Z=2) + P(Z=3) = 0{,}147 + 0{,}196 = 0{,}343$$

Aufgabe 177:

Die Erfahrungen der vergangenen Jahre besagen, dass in der Fahrschule "Heiligsblechle" erwartungsgemäß 30% der Männer und 40% der Frauen die Fahrprüfung nicht bestehen. Der Anteil der Männer in der Fahrschule liegt bei 1/5 und der Anteil der Frauen liegt bei 4/5.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Kandidaten (unbekannten Geschlechts) unter sonst gleichen Bedingungen, im ersten Anlauf die Fahrprüfung zu bestehen?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Durchfaller bei der Fahrprüfung männlich ist?

Lösung:

a)

$$P(\text{Prüfling besteht beim 1. Versuch}) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}7 + \frac{4}{5} \cdot 0{,}6 = 0{,}14 + 0{,}48 = 0{,}6200$$

b)

$$P(\text{Durchfaller ist Mann}) = \frac{\frac{1}{5} \cdot 0{,}3}{\frac{1}{5} \cdot 0{,}3 + \frac{4}{5} \cdot 0{,}4} = 0{,}1579$$

Aufgabe 178:

In einem Großraumbüro arbeiten 11 Frauen und 17 Männer. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden ersten Personen, die nach Arbeitsschluss den Raum verlassen, gleichen Geschlechts sind?

Lösung:

$$P(A) = \frac{11}{28} \cdot \frac{10}{27} + \frac{17}{28} \cdot \frac{16}{27} = 0{,}1455 + 0{,}3598 = 0{,}5053$$

Aufgabe 179:

In drei Urnen befinden sich je zwanzig Kugeln; in der ersten 4 rote und 16 weiße, in der zweiten 10 rote und 10 weiße und in der dritten nur rote. Nun wird eine Urne zufällig ausgewählt und Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Es wird eine rote Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Urne gewählt wurde?

Lösung:

$$P_r(U_1) = \frac{P(r \cap U_1)}{P(r)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{2}{17},$$

Aufgabe 180:

Beim Skatspiel werden an 3 Personen je 10 Karten ausgeteilt, 2 bleiben auf dem Tisch und bilden den so genannten „Skat".

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen im Skat 2 schwarze Buben?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind überhaupt 2 Buben im Skat?

c) Auf wie viele Arten können die Karten ausgeteilt werden?

Lösung:

a) Im Skat liegen 2 Karten, dies geht auf $m = \binom{32}{2} = \frac{32\cdot 31}{2} = 16\cdot 31 = 496$ Arten.

Der günstige Fall, dass 2 schwarze Buben im Skat liegen geht nur auf 1 Weise, weil es eben nur genau 2 schwarze Buben im Skatspiel gibt: g = 1

$$P = \frac{g}{m} = \frac{1}{496} = 0{,}0020$$

b) Wenn im Skat 2 beliebige Buben liegen sollen – es gibt 4 - dann gibt es dazu $\binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$ Möglichkeiten, denn die Reihenfolge des Austeilens ist unerheblich.

$$P = \frac{g}{m} = \frac{6}{496} = 0{,}0121$$

c)

$$\binom{32}{10}\cdot\binom{22}{10}\cdot\binom{12}{10}\cdot\binom{2}{2} = 2.753.294.408.504.640$$

Aufgabe 181:

Adolf und Harald wollen Euro in die Schweiz schmuggeln. Sie befinden sich in einem Reisebus mit weiteren 23 Reisenden, die kein Schwarzgeld bei sich haben. An der

Grenze werden drei Personen ausgewählt und genau durchsucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden

a) (2) weder Adolf noch Harald,

b) (2) Adolf und Harald,

c) (2) nur Adolf erwischt?

Lösung:

Für die ganze Aufgabe gilt:

Totale Anzahl der Möglichkeiten eine Dreiergruppe auszuwählen: (mögliche Fälle) $\binom{25}{3} = 2300$

a) weder Adolf noch Harald

Anzahl der Möglichkeiten 3 "saubere" Personen auszuwählen: $\binom{23}{3} = 1771$

Das ergibt für die Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{1771}{2300} = 77\%$

b) Adolf und Harald

Aus 23 Personen ist 1 auszuwählen: $\binom{23}{1} = 23$

Aus 2 Personen sind beide auszuwählen: $\binom{2}{2} = 1$

Das ergibt für die Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{1 \cdot 23}{2300} = 1\%$

b) Nur Adolf

Aus 1 Personen ist 1 auszuwählen: $\binom{1}{1} = 1$

Aus 23 Personen sind 2 auszuwählen: $\binom{23}{2} = 253$

Das ergibt für die Wahrscheinlichkeit: $p = \frac{1 \cdot 253}{2300} = 11\%$

Aufgabe 182:

In einer Urne befinden sich 8 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es werden nacheinander zufällig Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten beiden gezogenen Kugeln unterschiedlich gefärbt sind?

b) Wie oft muss man ziehen, damit man mit Sicherheit mindestens eine weiße Kugel zieht?

c) Die Kugeln werden jetzt wieder zurückgelegt. Wie oft muss man ziehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% eine schwarze Kugel dabei ist?

Lösung:

a)

$$\mathrm{P(X)} = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16+16}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

b) höchstens drei Mal.

c)

$P(X \geq 1) \geq 0{,}8$

Gegenereignis

$1 - P(=0) \geq 0{,}8 \quad | -1$

$P(X = 0) \geq -0{,}2 \qquad | \cdot (-1)$

$P(X = 0) \leq 0{,}2$

$$\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^{0} \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{\mathrm{n}} \leq 0{,}2$$

$0{,}8^n \leq 0{,}2 \quad | \ln(\quad))$

$n \cdot \ln(0{,}8) \leq \ln(0{,}2)$

$$n \geq \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}8)}$$

$n \geq 7{,}2126$

Man muss 8-mal ziehen

Aufgabe 183:

Eine Kaffeerösterei bezieht ihre Kaffeebohnen aus Lateinamerika, und zwar 2 Sorten aus Brasilien, 2 Sorten aus Venezuela und 4 Sorten aus Kolumbien. In der Rösterei werden jeweils 4 Sorten zusammengemischt, wobei aus jedem Land mindestens eine Sorte vertreten sein muss.

a) Wie viele solche Mischungen sind möglich.

Als Kaufanreiz legt die Kaffeerösterei in 20% aller Kaffeedosen ein Kaffeetässchen. Die Dosen gelangen in zufälliger Sortierung in die Regale eines Supermarkts. Monika kauft dort jede Woche eine Dose.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet Sie

b) in der 5. Woche das erste Tässchen,

Lösung:

a)

$(\text{Brasilien}) \cdot (\text{Venezuela}) \cdot (\text{Kolumbien})$

$\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} +$

$\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{4}{1} +$

$\binom{2}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1}$

$= 8 + 8 + 24 = 40 \text{ Möglichkeiten}$

b)

$P(X = 5) = 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08192$

Aufgabe 184:

Ein gezinkter Würfel hat diese Wahrscheinlichkeiten:

Zahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3

a) Man würfelt zweimal und verwendet die erste Zahl als Zehnerziffer, die zweite Zahl als Einerziffer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine Zahl über 60 mit zwei verschiedenen Ziffern?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei drei Würfen drei gleiche Zahlen?

c) Nun würfelt man fünfmal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man fünf aufeinanderfolgende Zahlen.

Lösung:

a) Hier erhält man die Zahlen 61, 62, 63, 64, 65

$P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}21$

b) Mögliche Zahlen: 111, 222, 333,444,555,666

$P(B) = 0{,}1^3 + 0{,}1^3 + 0{,}2^3 + 0{,}2^3 + 0{,}1^3 + 0{,}3^3 = 0{,}046$

c) Mögliche aufeinanderfolgende Zahlen: 12345 oder23456

$P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}00016$

Aufgabe 185:

Für Briefmarkensammler gibt es Sammelpackungen mit Briefmarken aus verschiedenen Ländern und mit verschiedenen Motiven.

Packungen des Typs M enthalten laut Aufdruck 60 % deutsche Marken (D), 35 % aus dem Bereich restliches Europa (R) und 5 % aus Afrika (A).

80% der afrikanischen Marken zeigen Naturmotive (N), bei denen aus Resteuropa sind es die Hälfte, von den deutschen Marken weisen jedoch nur ein Viertel Naturmotive auf.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit

A) enthält eine beliebig herausgenommene Marke ein Naturmotiv?

B): stammt eine Marke, die kein Naturmotiv darstellt, aus Deutschland?

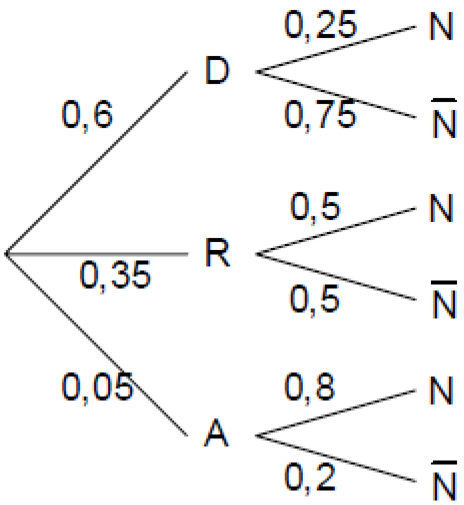
Lösung:

Gegeben sind folgende totalen Wahrscheinlichkeiten:

$P(D) = 0{,}6, \quad P(R) = 0{,}35 \quad \text{und} \quad P(A) = 0{,}05.$

Ferner die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$P_A(N) = 0{,}87, \quad P_R(N) = 0{,}5 \quad \text{und} \quad P_D(N) = 0{,}35.$



A)

$P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}35 \cdot 0{,}5 + 0{,}05 \cdot 0{,}8 = 0{,}3650$

B)

$$P(B) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}75}{0{,}6 \cdot 0{,}75 + 0{,}35 \cdot 0{,}5 + 0{,}05 \cdot 0{,}2} = 0{,}7087$$

Aufgabe 186:

Die Fußballmannschaft A gewinnt gegen B erfahrungsgemäß mit der

Wahrscheinlichkeit 0,6 und verliert mit der Wahrscheinlichkeit 0,3.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) gibt es ein Unentschieden?

b) gewinnt A fünfmal nacheinander?

Lösung:

Gegeben sind diese Wahrscheinlichkeiten: $p_{\text{A gew.}} = 0{,}6$, $p_{\text{B gew.}} = 0{,}3$

a) Also bleibt für ein Unentschieden die Wahrscheinlichkeit $p_{\text{unentsch.}} = 1 - 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}1$

b) $P = 0{,}6^5 \approx 0{,}0778$

Aufgabe 187:

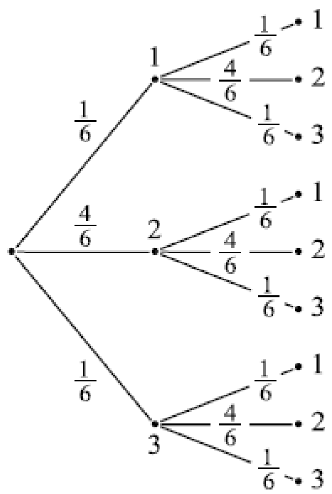
Ein Würfel trägt auf einer Seite die Zahl 1, auf vier anderen Seiten die Zahl 2 und auf einer Seite die Zahl 3. Er wird zweimal nacheinander geworfen und die Ergebnisse als zweistellige Zahl notiert.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Ergebnis kleiner als 20?

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis eine Primzahl (11;13;23;31) ist.

Lösung:

a)



Da der Würfel auf einer Seite die Zahl 1, auf vier anderen Seiten die Zahl 2 und auf einer Seite die Zahl 3 hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 1: $\frac{1}{6}$, für die Zahl 2: $\frac{4}{6}$ und für die Zahl 3: $\frac{1}{6}$.

Es gibt als Ergebnisse folgende zweistellige Zahlen: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis bei zwei Würfen kleiner als 20 ist, erhält man mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(\text{«Ergebnis ist kleiner als 20»}) &= P(11)+P(12)+P(13) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36}+\frac{4}{36}+\frac{1}{36} \\ &= \frac{6}{36}=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis bei zwei Würfen eine Primzahl ist, erhält man ebenfalls mit Hilfe der 1. und 2. Pfadregel (Produkt- und Summenregel):

$$\begin{aligned} P(\text{«Ergebnis ist Primzahl»}) &= P(11)+P(13)+P(23)+P(31) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{4}{36}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36} \end{aligned}$$

Aufgabe 188:

Mit einem idealen Würfel wird 4-mal gewürfelt. Die geworfenen Zahlen werden zu einer vierstelligen Zahl zusammengesetzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine vierstellige Zahl mit der Quersumme 8?

Lösung:

Quersumme 8 aus den 4 Ziffern erhält man auf folgende Arten:

$1+1+1+5 \rightarrow$ 4 Möglichkeiten

$1+1+2+4 \rightarrow$ 12 Möglichkeiten

$1+1+3+3 \rightarrow$ 6 Möglichkeiten

$1+2+2+3 \rightarrow$ 12 Möglichkeiten

$2+2+2+2 \rightarrow$ 1 Möglichkeit

Daraus erhält man folgende Wahrscheinlichkeit:

X: 4 Ziffern und Quersumme 8

$$P(X) = \frac{4+12+6+12+1}{6^4} = \frac{35}{1.296} = 0{,}0270$$

Aufgabe 189:

a) Wie viele verschiedene zehnstellige Zahlen kann man aus 6 Fünfern und 4 Siebenern bilden?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Zahl als erste und letzte Ziffer eine Sieben hat?

Lösung:

6 der 10 Plätze werden auf $\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$ ausgewählt und für die 6 Fünfer reserviert. Auf die restlichen Plätze kommen dann ohne weitere Auswahlmöglichkeit einfach die restlichen 4 Siebener. Also gibt es m = 210 solche Zahlen.

Wenn die erste und letzte Ziffer eine Sieben sein soll, dann hat man für die anderen beiden Siebener noch 2 aus 8 Plätzen zur Verfügung, d.h. es gibt $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ günstige Zahlen.

$$P = \frac{g}{m} = \frac{28}{210} = \frac{2}{15} \approx 0{,}1333$$

Aufgabe 190:

Im Hause der Familie Duck halten sich elf Enten auf. Eine muss trotz des scheußlichen Regens hinaus und den Erbonkel Dagobert mit dem Schirm abholen. Donald Duck hält elf Streichhölzer in der Hand, eins ist gekürzt. Wer das zieht, muss hinaus in den Regen. Soll Trick als erster ziehen, als letzter oder mehr so in der Mitte? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der erste, der zweite, ..., der letzte das kurze Streichholz zieht!

Lösung:

Spielabbruch beim Ziehen ohne Zurücklegen:

$$P(k) = \frac{1}{11}$$

$$P(1,k) = \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{11}$$

$$P(1,1,k) = \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{11}$$

usw.

Es ist immer die gleiche Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 191:

In Sikinien gibt es einen Park, in dem drei braune und zwei rote Eichhörnchen leben. Ihnen stehen zum Sonnenbaden 8 verschiedene Bäume zur Verfügung.

Jedes Eichhörnchen wählt sich seinen Baum zufällig aus.

a) (3) Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese 5 Eichhörnchen auf die 8 Bäume zu verteilen?

b) (3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf keinem Baum mehr als ein Eichhörnchen liegt?

c) (3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: Ein rotes und zwei braune Eichhörnchen sonnen sich gemeinsam auf einem Baum, während die anderen je einen Baum für sich haben?

Lösung:

a) Jedem der 5 Eichhörnchen stehen 8 Bäume zur Verfügung, also hat man

$$m_1 = 8^5 = 32.768$$

Möglichkeiten.

b) Für das 1. Tier gibt es dann 8 Bäume zur Auswahl, für das nächste noch 7 usw,

also $g = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8!}{3!} = 6720$

$$P = \frac{g}{m} = \frac{6720}{32768} \approx 0{,}2051$$

c) Zunächst wählen wir für den „Sammelbaum“ die Tiere aus, die sich darauf gemeinsam sonnen: ein rotes aus zwei und zwei braune aus drei.

Dies ergibt $\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1} = 3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

Diese drei Tiere haben noch alle 8 Bäume zur Auswahl.

Es bleiben noch 2 Tiere übrig, von denen jedes einen Baum für sich alleine sucht, also ergibt dies noch $7 \cdot 6$ Möglichkeiten.

Zusammen haben wir also $g = 8 \cdot (6 \cdot 7 \cdot 6) = 2016$.

$$P = \frac{g}{m} = \frac{2016}{32768} \approx 0{,}0615$$

Verteilungen

Binomialverteilung

Aufgabe 192:

Ein Jäger trifft sein Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit 40%.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er bei zehn Schüssen mehr als sechs Treffer? (0,0548)

b) Bevor der Jäger anfängt zu schießen, trinkt er noch eine Flasche Zielwasser der "Triff die Sau". Dadurch erhöht sich seine Wahrscheinlichkeit das Ziel zu treffen auf 70%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er bei zehn Schüssen mehr als sechs Treffer? (0,6496)

Lösung:

a)

p=0,4; q=1-0,4=0,6; n=10; k=7, 8, 9, 10

$P(X \geq 7) = (X = 7) + P(X = 8) + (X = 9) + (X = 10)$

$= \binom{10}{7} \cdot 0{,}4^7 \cdot 0{,}6^3 + \binom{10}{8} \cdot 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}4^9 \cdot 0{,}6^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}4^{10} \cdot 0{,}6^0$

$= 0{,}0425 + 0{,}0106 + 0{,}0016 + 0{,}0001 = 0{,}0548$

b)

p=0,7; q=1-0,3=0,7; n=10; k=7, 8, 9, 10

$P(X \geq 7) = (X = 7) + P(X = 8) + (X = 9) + (X = 10)$

$= \binom{10}{7} \cdot 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^3 + \binom{10}{8} \cdot 0{,}7^8 \cdot 0{,}3^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}7^9 \cdot 0{,}3^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}7^{10} \cdot 0{,}3^0$

$= 0{,}2668 + 0{,}2335 + 0{,}1211 + 0{,}0282 = 0{,}6496$

Aufgabe 193:

Bei einem Automaten gewinnt man in 30% aller Spiele. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man

a) bei 10 Spielen, (0,0015)

b) bei 20 Spielen achtmal gewinnt? (0,1144)

Lösung

a)

p=0,3; q=1-0,3=0,7; n=10; k=8

$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}3^8 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}0015$

b)

p=0,3; q=1-0,3=0,7; n=10; k=8

$P(X = 8) = \binom{20}{8} \cdot 0{,}3^8 \cdot 0{,}7^{12} = 0{,}1144$

Aufgabe 194:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bienenvolk einen harten Winter überlebt, ist 0,4. ein Imker besitzt 6 Völker. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 einen harten Winter überleben? (0,7667)

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bienenvolk einen harten Winter überlebt, ist 0,4. Ein Imker besitzt 6 Völker. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 einen harten Winter überleben?

p=0,4; q=1-0,4=0,6; n=6; k=2,3,4,5,6

$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$= 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$

$= 1 - \left(\binom{6}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^5\right) = 1 - (0{,}0467 + 0{,}1866) = 0{,}7667$

Aufgabe 195:

Für einen Einsatz von 0,50 Cent an den Spielleiter darf der Spieler zwei ideale Würfel mit jeweils den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 einmal gleichzeitig werfen. Zeigen beide Würfel dieselbe Augenzahl 1, 2, 3, 4 oder 5 (Pasch), so erhält der Spieler 1 Euro, bei zweimal Augenzahl 6 (Sechserpasch) sogar 3 Euro.

In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung durch den Spielleiter.

Ein Schüler führt dieses Spiel zehnmal aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

A: genau zweimal Sechserpasch, (0,0277)

B: höchstens dreimal ohne Auszahlung? (0,00029)

Lösung:

$P(A) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{36}\right)^2 \cdot \left(\frac{35}{36}\right)^8 = 0{,}0277$

$P(B \leq 3) = b\left(0 - 3; 10; \frac{5}{6}\right) = 0{,}00029$

Aufgabe 196:

Eine Firma bezieht Bauteile T aus zwei verschiedenen Werkstätten. Erfahrungsgemäß sind 90% dieser Bauteile T_1 aus der Werkstatt 1 intakt und 80% dieser Bauteile T_2 aus der Werkstatt 2 intakt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 20 ausgewählten Bauteilen (es kann nicht unterschieden werden, aus welcher Werkstatt die Teile kommen) drei defekte zu erhalten? (0,0940)

Lösung:

Lösung:

$p_{\text{intakt}} = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$

$p_{\text{nicht intakt}} = 1 - p_{\text{intakt}} = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$

$\mathrm{P(X = 3) = b(3; 20; 0{,}28) = 0{,}0940}$

Aufgabe 197:

An einer Schule mit 900 Schülern wird monatlich eine Schülerzeitung herausgegeben. Im Durchschnitt wird diese Zeitung von 80% der Schüler gekauft.

In der Redaktion arbeiten 15 Schüler, von denen jeder mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 bei jeder Sitzung fehlt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: "Alle Mitglieder der Redaktion sind anwesend"(0,2059)

B: "Es fehlen weniger als ein Drittel der Redakteure" (0,9873)

C: "Bei drei aufeinanderfolgenden Sitzungen fehlt jeweils höchstens ein Redakteur"(0,

Lösung:

A)

n=15; p=0,1

$b(0; 15; 0{,}1) = 0{,}2059$

B)

$b(0-4; 15; 0{,}1) = 0{,}2059 + 0{,}3432 + 0{,}2669 + 0{,}1285 + 0{,}0428 = 0{,}9873$

C)

$(b(0-1; 15; 0{,}1))^3 = (0{,}2059 + 0{,}3432)^3 = 0{,}1656$

Aufgabe 198:

Im Mittelalter wurden Goldmünzen als Zahlungsmittel verwendet. Von der Gesamtmenge war 1% Falschgeld im Umlauf. Falsche Münzen konnte man verbiegen. Äußerlich waren echte und falsche Goldmünzen nicht zu unterscheiden.

Der Schatzmeister des Landes Stochastika bewahrte die Goldmünzen in Kästen zu je 100 Stück auf. Dabei interessierten ihn folgende Ereignisse:

A: "In einem Kasten waren genau 2 falsche Münzen." (0,1849)

B: "In einem Kasten waren mehr als 2 und höchstens 4 falsche Münzen." (0,0759)

Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Lösung:

n=100; p=0,01

A)

$b(2; 100; 0{,}01) = \binom{100}{2} \cdot (0{,}01)^2 \cdot (0{,}99)^{98} = 0{,}1849$

B)

$b(3-4; 100; 0{,}01) = \binom{100}{3} \cdot (0{,}01)^3 \cdot (0{,}99)^{97} + \binom{100}{4} \cdot (0{,}01)^4 \cdot (0{,}99)^{96}$

$= 0{,}0610 + 0{,}0149 = 0{,}0759$

Aufgabe 199:

Bei der Herstellung von gefärbten Gummibällen treten Farb- und Materialfehler unabhängig voneinander auf. Farbfehler treten bei 2% der hergestellten Menge auf. Nur 90% der produzierten Bälle sind fehlerfrei. Alle produzierten Bälle werden in Kartons zu je 10 Stück verpackt und an Warenhäuser versandt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Karton höchstens ein Ball fehlerhaft ist? (0,7361)

Lösung:

n=10; p=0,1

$b(0-1; 10; 0{,}1) = 0{,}3487 + 0{,}3874 = 0{,}7361$

Aufgabe 200:

Ein Unternehmer zahlt einem Taucher der Südsee für jede abgelieferte Muschel 5 Cent (1 Euro = 100 Cent). Erfahrungsgemäß haben 16% dieser Muscheln genau eine Perle. Die übrigen haben keine Perle.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Unternehmer für 1 Euro, den er dem Taucher zahlt, genau 3 Perlen erhält? ()

Lösung:

n=20; p=0,16

$b(3;20;0{,}16)=\binom{20}{3}\cdot(0{,}16)^3\cdot(0{,}84)^{17}=0{,}2410$

Aufgabe 201:

Eine gezinkte Münze zeigt in 70% aller Fälle Kopf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 50 Würfen:

a) mehr als 2-mal, (1)

b) mindestens 1-mal, (1)

c) höchstens 3-mal, (0,0000)

d) weniger als 3-mal, (0,0000)

Kopf auftaucht?

Lösung:

a)

$b(3-50;50;0{,}7)=1-b(0-2;50;0{,}7)=1-0{,}0000-0{,}0000-0{,}0000=1$

b)

$b(1-50;50;0{,}7)=1-b(0;50;0{,}7)=1-0{,}0000-0{,}0000=1$

c)

$b(0-3;50;0{,}7)=0{,}0000+0{,}0000+0{,}0000+0{,}0000=0{,}0000$

d)

$b(0-2;50;0{,}7)=0{,}0000+0{,}0000+0{,}0000=0{,}0000$

Aufgabe 202:

Der Betreiber eines Glücksrades mit einer Gewinnwahrscheinlichkeit von 10% hat noch 18 Sachgewinne übrig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei 100 Spielen nicht mehr genügend Gewinne ausgeben kann? (0,0044)

Lösung:

$b(19-100;100;0{,}10)=\binom{100}{19}\cdot(0{,}1)^{19}\cdot(0{,}9)^{81}+\binom{100}{20}\cdot(0{,}1)^{20}\cdot(0{,}9)^{80}$

$$+\binom{100}{21}\cdot(0{,}1)^{21}\cdot(0{,}9)^{79}+\binom{100}{22}\cdot(0{,}1)^{22}\cdot(0{,}9)^{78}+\binom{100}{23}\cdot(0{,}1)^{23}\cdot(0{,}9)^{77}$$

$$=0{,}0026+0{,}0012+0{,}0004+0{,}0002+0{,}0000=0{,}0044$$

Aufgabe 203:

1968 hatte die Bundesrepublik Deutschland 60 184 000 Einwohner. Darunter waren 28 558 000 männlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) unter 50 Personen höchstens 15 Frauen sind (0,00017268)

Lösung:

a)

n	50		k	WN
k	0-15		0	0,0000
p	0,5255		1	0,0000
q	0,4745		2	0,0000
			3	0,0000
			4	0,0000
			5	0,0000
			6	0,0000
			7	0,0000
			8	0,0000
			9	0,0000
			10	0,0000
			11	0,0000
			12	0,0000
			13	0,0001
			14	0,0003
			15	0,0007
			Summe:	0,0011

Aufgabe 204:

Ein dressiertes Versuchstier betätigt auf ein Lichtsignal hin einen Hebel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$. Dieses Signal wird 72-mal gegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Versuchstier dabei

a) den höchstens Hebel 60-mal,(0,9995)

b) mindestens 40 und höchstens 60-mal betätigt?(0,9811)

Lösung:

a)

72	
0,66666667	
0,33333333	
0	4,43884E-35
1	6,43632E-33
2	4,60263E-31
3	2,16389E-29
4	7,52301E-28
5	2,06263E-26
6	4,64479E-25
7	8,83427E-24
8	1,44843E-22
9	2,0792E-21
10	2,6452E-20
11	3,012E-19

56	0,985717911
57	0,993109402
58	0,996932588
59	0,998746981
60	0,999533218
61	0,999842557
62	0,999952322
63	0,999987169
64	0,999996969
65	0,999999381
66	0,999999893
67	0,999999985
68	0,999999998
69	1
70	1
71	1
72	1

b)

39	0,008436545	
40	0,013920299	
41	0,021729247	
42	0,032076507	
43	0,044757917	
44	0,058999072	
45	0,073421067	
46	0,086189949	
47	0,095359092	
48	0,099332388	
49	0,097305196	
50	0,08952078	
51	0,077233614	
52	0,062380996	
53	0,047079997	
54	0,033130368	
55	0,021685332	
56	0,013166094	
57	0,007391492	
58	0,003823185	
59	0,001814393	
60	0,000786237	0,98110322
61	0,000309339	

a) 0,9995 b) 0,9811

Aufgabe 205:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Würfen mit einer fairen Münze weniger als 9-mal „Kopf“ erscheint. (98,92%)

Lösung:

Binomialverteilung mit n = 10 und p = 0,5

$P(X < 9) = 1 - P(X \geq 9)$

$1-P(X \geq 9) = 1-(P(X = 9) + P(X = 10)) = 1-(b(10;10;0{,}5) + b(9;10;0{,}5))$

$=1-(0{,}0098+0{,}0010)=0{,}9892$

Aufgabe 206:

Eine homogene Münze wird 6-mal geworfen (bzw. 6 homogene Münzen einmal); es sei Zahl gleich Erfolg. Dann gilt: n=6 und p=q=1/2.

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal Zahl auftritt (also k=2). (23,44%)

(b) Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens viermal Zahl auftritt (also k=4,5 oder 6). (34,38%)

(c) Die Wahrscheinlichkeit, dass keinmal Zahl auftritt (also alles Misserfolge). (1,6%)

Lösung:

Anzahl der Versuche: n=6

Anzahl der Treffer: k=2

WN für Zahl: p=0,5

WN für Wappen: q=0,5

(a)

$$b(2;6;0{,}5)=\binom{6}{2}\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}5^4=0{,}2344$$

(b)

n=6; k=4,5,6; p=0,5; q=0,5

$$b(4;6;0{,}5)+b(5;6;0{,}5)+b(6;6;0{,}5)=0{,}2344+0{,}093+0{,}016=0{,}3434$$

(c) Die Wahrscheinlichkeit, dass keinmal Zahl auftritt ist

$$q^6=0{,}5^6=0{,}0156$$

Aufgabe 207:

In einem Autobus befinden sich 30 Personen. Im Durchschnitt sind aus der Sicht der Zöllner 10% Schmuggler. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger Auswahl von 3 Personen keinen, genau einen, genau zwei, genau drei Schmuggler zu erwischen? (72,9%; 24,3%; 2,7%; 0,1%)

Lösung:

n = 3, p = 0.1, k = 0,1,2,3

$$b(0;3;0{,}1)=\binom{3}{0}\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^3=0{,}7290$$

$$b(1;3;0{,}1)=\binom{3}{0}\cdot 0{,}1^1\cdot 0{,}9^2=0{,}2430$$

$$b(2;3;0{,}1)=\binom{3}{0}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^1=0{,}0270$$

$$b(3;3;0{,}1)=\binom{3}{0}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^0=0{,}0010$$

Aufgabe 208:

In einer Schule befinden sich 750 Schüler. 30% sind fehlsichtig. Der Schularzt untersucht die ersten Klassen (123 Schüler).

Wie groß ist die W, genau 35 fehlsichtige Schüler zu erhalten? (7,4%)

Lösung:

n=123; k=35; p=0,3

$$b(35;123;0{,}3)=\binom{123}{35}\cdot 0{,}3^{35}\cdot 0{,}7^{88}=0{,}0740$$

Aufgabe 209:

Der Anteil der Linkshänder wird mit 1% der Bevölkerung angenommen. Berechne die WN dafür, dass in einer Klasse mit 29 Schülern

(a) genau 2 Linkshänder, (0,0310)

(b) mindestens 3 Linkshänder sitzen. (0,0029)

Lösung:

(a) n=29; k=2; p=0,01

$b(2;29;0{,}01) = \binom{29}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{27} = 0{,}0310$

(b)

$b(3-29;29;0{,}01) = 1 - b(0-2;29;0{,}01)$

$= \binom{29}{0} \cdot 0{,}01^0 \cdot 0{,}99^{29} + \binom{29}{1} \cdot 0{,}01^1 \cdot 0{,}99^{28} \binom{29}{2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{27}$

$= 0{,}7472 + 0{,}2189 + 0{,}0310 = 1 - 0{,}9971 = 0{,}0029$

Aufgabe 210:

Beim Pfeilwerfen rechnet man bei 100 Würfen mit 9 Volltreffern. Wie groß ist die P, dass ein Schütze mit 25 Würfen genau 3 Volltreffer erzielt. Schätze das Ergebnis vorher ab! (0,2106)

Lösung:

n=25; k=3; p=0,09

$b(3;25;0{,}01) = \binom{25}{3} \cdot 0{,}09^3 \cdot 0{,}91^{22} = 0{,}2106$

Aufgabe 211:

Eine Mannschaft gewinnt jedes Spiel mit der Wahrscheinlichkeit $2/3$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie

(a) genau 2 (0,2963)

(b) mindestens1, (0,9877)

(c) über die Hälfte (0,5926)

von 4 Spielen gewinnt?

Lösung:

(a) n=4; k=2;$p = \frac{2}{3}$; $q = \frac{1}{3}$

$$b\left(2; 4; \frac{2}{3}\right) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0{,}2963$$

(b) n=4; k=1-4;$p = \frac{2}{3}$; $q = \frac{1}{3}$

$$b\left(1-4; 4; \frac{2}{3}\right) = 1 - b\left(0; 4; \frac{2}{3}\right) = 1 - \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 1 - 0{,}0123 = 0{,}9877$$

(c) Die Mannschaft muss 3 oder 4 Spiele gewinnen. Es folgt:

$$b\left(3-4; 4; \frac{2}{3}\right) = b\left(3; 4; \frac{2}{3}\right) + b\left(4; 4; \frac{2}{3}\right) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$$
$$= 0{,}3951 + 0{,}1975 = 0{,}5926$$

Aufgabe 212:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, dass in einer Familie mit 6 Kindern

(a) 3 Jungen und 3 Mädchen, (0,3125)

(b) weniger Jungen als Mädchen sind? (0,3438)

Wir nehmen dabei an, dass Jungen- und Mädchengeburten gleichwahrscheinlich sind.

Lösung:

(a) n=6; k=3;$p = q = 0{,}5$

$$b(3; 6; 0{,}5) = \binom{6}{3} \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^3 = 0{,}3125$$

(b) Das Ergebnis ist 0, 1, 2 Jungen, also

$$b(0-2; 6; 0{,}5) = b(0; 6; 0{,}5) + b(1; 6; 0{,}5) + b(2; 6; 0{,}5)$$

$$= \binom{6}{0} \cdot (0{,}5)^0 \cdot (0{,}5)^6 + \binom{6}{1} \cdot (0{,}5)^1 \cdot (0{,}5)^5 + \binom{6}{2} \cdot (0{,}5)^2 \cdot (0{,}5)^4$$

$$= 0{,}0156 + 0{,}0938 + 0{,}2344 = 0{,}3438$$

Aufgabe 213:

Eine Maschine ist defekt geworden und produziert mit der Wahrscheinlichkeit p=0,8 defekte Geräte. Der laufenden Produktion werden 20 Geräte entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man darunter

a) genau 3 gute (20,54%)

b) höchstens 1 gutes Gerät (6,92%)

c) genau 15 defekte? (17,46%)

d) Mindestens 17 defekte Geräte (41,14%)

Lösung:

Es liegt eine 20-stufige Bernoullikette vor, da die Wahrscheinlichkeit für defekt mit 0,8 als konstant angenommen werden kann.
X sei die Zufallsvariable "Zahl der guten Geräte" und Y = "Zahl der defekten Geräte".
X und Y sind binomialverteilt.

a) $P(X=3)=\binom{20}{3}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^{17}=\frac{20\cdot 19\cdot 8}{3!}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^{17}=0{,}2054$

b) $P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}8^{20}+20\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^{19}=0{,}0692$

c) $P(Y=15)=\binom{20}{15}\cdot 0{,}8^{15}\cdot 0{,}2^5=0{,}1746$

d) $P(Y\geq 17)=P(Y=17)+P(Y=18)+P(Y=19)+P(Y=20)$

$$=\binom{20}{17}\cdot 0{,}8^{17}\cdot 0{,}2^3+\binom{20}{18}\cdot 0{,}8^{18}\cdot 0{,}2^2+\binom{20}{19}\cdot 0{,}8^{19}\cdot 0{,}2+0{,}8^{20}$$

$$=0{,}2054+0{,}1369+0{,}0576+0{,}0115=0{,}4114$$

Aufgabe 214:

In einem Lostopf ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn 0,4. Wie oft muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit mindestens einen Gewinn zu bekommen? (5)

Lösung:

Es sei X die Zahl der Gewinne. X ist binomialverteilt. Gesucht ist der Umfang n der Stichprobe.

Für die Lösung ist eine Bedingung gestellt worden:
A sei das Ereignis: Man zieht mindestens einen Gewinn.
Mit der Zufallsvariablen X lautet A so: $X \geq 1$. Und die Bedingung lautet

$$P(A) = P(X \geq 1) \geq 0{,}9 \quad (1)$$

Die Mindestens-Aufgabe verwandeln wir über das Gegenereignis:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

Somit lautet die **Bedingung:** $1 - P(X = 0) \geq 0{,}9 \quad (2)$
Also $1 - 0{,}9 \geq P(X = 0)$
d.h. $P(X = 0) \leq 0{,}1 \quad (3)$
X=0 bedeutet aber Unter n Ziehungen keine Gewinne. Dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = 0) = 0{,}6^n$. Also gilt: $0{,}6^n \leq 0{,}1 \quad (4)$
Wenn die Unbekannte n im Exponenten steht muß man die Ungleichung logarithmieren: $\log\ 0{,}6^n \leq \log\ 0{,}1$
Nach dem 3. Logarithmengesetz gilt $\log\ 0{,}6^n = n \cdot \log\ 0{,}6$
Also folgt $n \cdot \log\ 0{,}5 \leq \log\ 0{,}1 \quad (5)$
Jetzt muß man die Ungleichung durch $\log\ 0{,}6$ dividieren. Diese Zahl ist aber negativ (wie alle Logarithmen von Zahlen zwischen 0 und 1). Daher kehrt sich bei der Division durch die negative Zahl $\log 0{,}6$ die Ungleichung um:

$$n \geq \frac{\log\ 0{,}1}{\log\ 0{,}6} = 4{,}5\ldots \quad (6)$$

-

Anmerkung:
Diese Rechnung wurde durch viel Erklärung zu einer langen Abhandlung. Die Kurzrechnung besteht aus den numerierten Ungleichungen und sieht so aus: Bed.: $P(X \geq 1) \geq 0{,}9$
d.h. $1 - P(X = 0) \geq 0{,}9$
Also $P(X = 0) \leq 0{,}1$
d.h. $0{,}6^n \leq 0{,}1$
Logarithmiert: $n \cdot \log\ 0{,}6 \leq \log\ 0{,}1$
also $n \geq \frac{\log\ 0{,}1}{\log\ 0{,}6} = 4{,}5\ldots$

Ergebnis:
Man muß mindestens 5 Lose ziehen, um mit 90 Wahrscheinlichkeit mindestens einen Gewinn zu erhalten.

Aufgabe 215:

In einem Lostopf ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn 0,4. Wie oft muss man mindestens ziehen, um mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit mindestens vier Gewinne zu bekommen? (15)

Lösung:

Es sei X die Zahl der Gewinne. X ist binomialverteilt. Gesucht ist der Umfang n der Stichprobe.

$P(X \geq 4) \geq 0{,}9$

Gegenereignis

$1 - P(X \leq 3) \geq 0{,}9 \quad | -1$

$P(X \leq 3) \geq -0{,}1 \quad | \cdot (-1)$

$P(X \leq 3) \leq 0{,}1$

Nun sucht man in der Tafel ab z. B. n=5 aufwärts so lange, bis $P(X \leq 3)$ kleiner oder gleich 0,1 ist.

Dabei muss man natürlich verschieden n-Werte ausprobieren.

n=5; k=0-3; p=0,4: 0,0778+0,2592+0,3456+0,2304≤0,1 (falsch)

n=10; k=0-3; p=0,4: 0,0060+0,0403+0,01209+0,2150≤0,1 (falsch)

n=15; k=0-3; p=0,4: 0,0005+0,0047+0,0219+0,0634≤0,1 (richtig)

Jetzt noch überprüfen, ob der Wert schon bei n=14 unterschritten wurde

n=14; k=0-3; p=0,4: 0,0008+0,0073+0,0317+0,0845≤0,1 (falsch)

Man erkennt, dass an n=15 die Bedingung erfüllt ist.

Ergebnis: Man muss mindestens 15 Lose kaufen, um mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit mindestens 4 Gewinne zu erhalten.

Aufgabe 216:

Eine Lieferung Kondensatoren trägt die Aufschrift: Verbilligte Lieferung, da mit 10% Wahrscheinlichkeit ein Transistor defekt sein kann.

Händler Lehmann testet die Lieferung und misst bei vielen Kondensatoren die Kapazität, um festzustellen, ob sie brauchbar sind.

Um eine Entscheidung treffen zu können, will er von uns wissen, wie oft er mindestens testen muss, um mit 70% Wahrscheinlichkeit mindestens 5 defekte Kondensatoren zu finden. (50)

Lösung:

Es sei X die Zahl der defekten Kondensatoren. Sie sind mit p=0,1 defekt.

X ist binomialverteilt. Gesucht ist n, der Umfang der Stichprobe.

$\mathrm{P(X \geq 5) \geq 0{,}70}$

Gegenereignis:

$1 - \mathrm{P(X \leq 4)} \geq 0{,}70 \;\; | - 1$

$-\mathrm{P(X \leq 4)} \geq -0{,}30 \;\; | \cdot (-1)$

$\mathrm{P(X \leq 4)} \leq 0{,}30$

Nun sucht man in der Tafel ab z. B. n=10 aufwärts so lange, bis $P(X \leq 4)$ kleiner oder gleich 0,30 ist.

Dabei muss man natürlich verschieden n-Werte ausprobieren.

n=10; k=0-4; p=0,1: 0,3487+0,3874+0,1937+0,0574+0,0112≤0,30 (falsch)

n=30; k=0-4; p=0,1: 0,0424+0,1413+0,2277+0,2361+0,1771≤0,30 (falsch)

n=50; k=0-4; p=0,1: 0,0052+0,0289+0,0779+0,1386+0,1809≤0,30 (falsch)

0,3195≤0,30

Da wir keine weiteren Werte in der Tafel mehr habe, müssen wir n=50 als Nahrungslösung annehmen.

Aufgabe 217:

Ein Händler erhält von einem neuen Lieferanten eine Sendung mit 1000 Glühbirnen.

Er will testen, ob dieser Lieferant zuverlässig ist. Dessen Angabe lautete: Eine Glühlampe ist zu 95% Wahrscheinlichkeit gut.

Der Händler beschließt folgendes **Testverfahren**:

Zunächst prüft er 25 Glühlampen. Sind darunter höchstens 2 defekte, nimmt er die Sendung an. Findet er mehr als 5 defekte, schickt er sie zurück. Bei 3 bis 5 defektenwill er einen ungünstigen Zufall ausschließen und testet weitere 50 Glühbirnen.

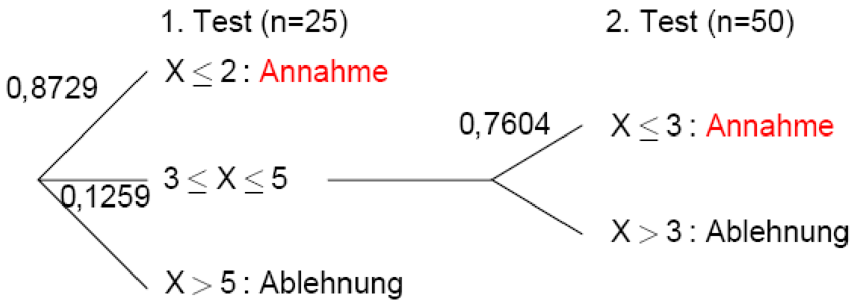
Sind darunter höchstens 3 defekte, dann nimmt er die Sendung an, in jedem anderen Fall wird sie zurückgeschickt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt er die Sendung an? (96,86%)

Lösung:

X sei die Zahl der defekten Glühbirnen mit p = 0,95. X ist binomialverteilt

Baumdiagramm:



Berechnung der Wahrscheinlichkeiten:

$P(X \leq 2) = b(0-2; 25; 0{,}05) = b(0; 25; 0{,}05) + b(1; 25; 0{,}05) + b(2; 25; 0{,}05)$

$= \binom{25}{0} \cdot (0{,}05)^0 \cdot (0{,}95)^{25} + \binom{25}{1} \cdot (0{,}05)^1 \cdot (0{,}95)^{24} + \binom{25}{2} \cdot (0{,}05)^2 \cdot (0{,}95)^{23}$

$= 0{,}2774 + 0{,}3650 + 0{,}2305 = 0{,}8729$

$P(3 \leq X \leq 5) = b(3-5; 25; 0{,}05) = b(3; 25; 0{,}05) + b(4; 25; 0{,}05) + b(5; 25; 0{,}05)$

$= \binom{25}{3} \cdot (0{,}05)^3 \cdot (0{,}95)^{22} + \binom{25}{4} \cdot (0{,}05)^4 \cdot (0{,}95)^{21} + \binom{25}{5} \cdot (0{,}05)^5 \cdot (0{,}95)^{20}$

$= 0{,}0930 + 0{,}0269 + 0{,}0060 = 0{,}1259$

$P(X \leq 3) = b(0-3; 50; 0{,}05)$

$= b(0; 50; 0{,}05) + b(1; 50; 0{,}05) + b(2; 50; 0{,}05) + b(3; 50; 0{,}05)$

$= 0{,}0769 + 0{,}2025 + 0{,}2611 + 0{,}2199 = 0{,}7604$

Annahme-Wahrscheinlichkeit:

$P(Annahme) = 0{,}8729 + 0{,}1259 \cdot 0{,}7604 = 0{,}9686$

Aufgabe 218:

Eine Mischung Vogelfutter besteht aus runden und länglichen Körnern. Da die runden wertvoller aber auch teurer sind, will ein Kunde testen, ob die Angabe, dass 40% der Körner im Vogelfutter "Birdywell" rund sind, auch glaubhaft ist.

Er entnimmt 50 Körner rein zufällig. X sei die Zahl der runden Körner.

Berechne P(X = 12) sowie ein zum Erwartungswert symmetrisches Intervall, in dem X mit 80% Wahrscheinlichkeit liegt. (16-24)

Lösung:

Es sei X die Zahl der runden Körner mit p=0,4.

X ist binominalverteilt. Umfang der Stichprobe n=5.

$P(X = 12) = b(12; 50; 0,4) = 0,0076$

Erwartungswert:

$E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0,4 = 20$

Gesucht ist ein symmetrisches Intervall bezüglich des Erwartungswertes E:

$P(19 \leq X \leq 21) = b(19; 50; 0,4) + b(20; 50; 0,4) + b(21; 50; 0,4)$

$= 0,1109 + 0,1146 + 0,1091 = 0,3346$

Ergibt noch keine 80%, deshalb wird das Intervall vergrößert.

$P(18 \leq X \leq 22) = b(18; 50; 0,4) + b(19; 50; 0,4) + b(20; 50; 0,4) + b(21; 50; 0,4)$

$+b(22; 50; 0,4)$

$= 0,0987 + 0,1109 + 0,1146 + 0,1091 + 0,0959 = 0,5292$

Ergibt noch keine 80%, deshalb wird das Intervall vergrößert.

$P(17 \leq X \leq 23) = b(17; 50; 0,4) + b(18; 50; 0,4) + b(19; 50; 0,4) + b(20; 50; 0,4)$

$+b(21; 50; 0,4) + b(22; 50; 0,4) + b(23; 50; 0,4)$

$= 0,0808 + 0,0987 + 0,1109 + 0,1146 + 0,1091 + 0,0959 + 0,0778 = 0,6878$

Ergibt noch keine 80%, deshalb wird das Intervall vergrößert.

$P(16 \leq X \leq 24) = b(16; 50; 0,4) + b(17; 50; 0,4) + b(18; 50; 0,4)$

$+b(19; 50; 0,4) + b(20; 50; 0,4) + b(21; 50; 0,4) + b(22; 50; 0,4)$

$+b(23; 50; 0,4) + b(24; 50; 0,4)$

$= 0,0606 + 0,0808 + 0,0987 + 0,1109 + 0,1146 + 0,1091 + 0,0959$

$+0,0778 + 0,0584 = 0,8068$

Dies ergibt 80%, deshalb dies das gesuchte Intervall ($P(16 \leq X \leq 24)$).

Aufgabe 219:

Die Firma Lampo bezieht Glühbirnen von den Herstellern A und B. Von A werden 70% und von B 30% gekauft. Die Qualitätsangabe von A lautet: Im Mittel können 3 % der Birnen defekt sein, bei B sollen es 6 % sein.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 50 zufällig entnommenen Glühbirnen mindestens 35 vom Hersteller A? (0,5692)

b) In welchem zur Erwartungswert E(X) symmetrischen Intervall muss die Zufallsvariable X = "Zahl der von A gelieferten Birnen" liegen, damit die Wahrscheinlichkeit, so viele Glühbirnen von A ausgewählt zu haben, etwa 72 % beträgt? (n=50) (Lösung: 0,7202)

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 72 von A gelieferten Glühbirnen mehr als 2 defekte? (0,3671)

d) Wie viel Prozent aller Glühbirnen, die Lampo bezieht, sind bei der Auslieferung defekt? (0,0390)

e) Dem Lager wird eine Glühbirne zufällig entnommen. Sie ist defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie vom Hersteller A? (0,5385)

Lösung:

a) Es sei X=Zahl der Glühbirnen von A; p=0,7; n=50. X ist binominalverteilt.

$P(X \geq 35) = b(35 - 50; 50; 0{,}7) = 0{,}5692$

b) Berechnung des Erwartungswertes:

$E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}7 = 35$

Gesucht ist ein symmetrisches Intervall bezüglich des Erwartungswertes E:

$\mathrm{P}(34 \leq \mathrm{X} \leq 36) = \mathrm{b}(34; 50; 0{,}7) + \mathrm{b}(35; 50; 0{,}7) + \mathrm{b}(36; 50; 0{,}7)$

$= 0{,}1147 + 0{,}1223 + 0{,}1189 = 0{,}3559$

Ergibt noch keine 72%, deshalb wird das Intervall vergrößert.

$\mathrm{P}(33 \leq \mathrm{X} \leq 37) = \mathrm{b}(33; 50; 0{,}7) + \mathrm{b}(34; 50; 0{,}7) + \mathrm{b}(35; 50; 0{,}7)$

$+\mathrm{b}(36; 50; 0{,}7) + \mathrm{b}(37; 50; 0{,}7)$

$= 0{,}0983 + 0{,}1147 + 0{,}1223 + 0{,}1189 + 0{,}1050 = 0{,}5592$

Ergibt noch keine 72%, deshalb wird das Intervall vergrößert.

$\mathrm{P}(32 \leq \mathrm{X} \leq 38) = \mathrm{b}(32; 50; 0{,}7) + \mathrm{b}(33; 50; 0{,}7) + \mathrm{b}(34; 50; 0{,}7) + \mathrm{b}(35; 50; 0{,}7)$

$+\mathrm{b}(36; 50; 0{,}7) + \mathrm{b}(37; 50; 0{,}7) + \mathrm{b}(38; 50; 0{,}7)$

$= 0{,}0772 + 0{,}0983 + 0{,}1147 + 0{,}1223 + 0{,}1189 + 0{,}1050 + 0{,}0838 = 0{,}7202$

Dies ergibt 72%, deshalb dies das gesuchte Intervall ($\mathrm{P}(32 \leq \mathrm{X} \leq 38)$).

c) Es sei Y die Zahl der defekten Glühbirnen. p=0,03 (für Lieferant A).

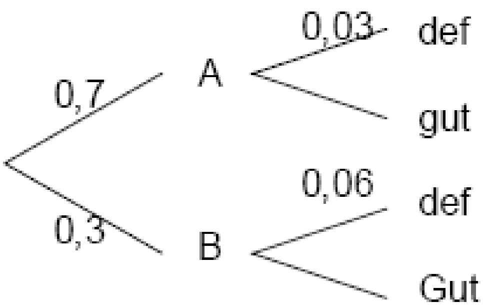
Y ist binomialverteilt.

$$P(Y > 2) = b(0-2; 72; 0{,}03) = 1 - b(0-2; 72; 0{,}03)$$

$$= 1 - \binom{72}{0} \cdot (0{,}03)^0 \cdot (0{,}97)^{72} - \binom{72}{1} \cdot (0{,}03)^1 \cdot (0{,}97)^{71} - \binom{72}{2} \cdot (0{,}03)^2 \cdot (0{,}97)^{70}$$

$$= 1 - 0{,}1116 - 0{,}2485 - 0{,}2728 = 0{,}3671$$

d)



$$p_{\text{defekt}} = 0{,}7 \cdot 0{,}03 + 0{,}3 \cdot 0{,}06 = 0{,}0390$$

e)

$$P(\text{defekt}) = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}03}{0{,}7 \cdot 0{,}03 + 0{,}3 \cdot 0{,}06} = 0{,}5385$$

Aufgabe 220:

In einer Urne befinden sich 5 weiße und 3 schwarze Kugeln. Wir ziehen 5 mal nacheinander mit Zurücklegen.

a) Welche Verteilungsfunktion beschreibt das Zufallsexperiment? Welche Parameter beschreiben diese Verteilung und welche Werte besitzen sie in diesem Beispiel? Welche Werte μ bzw. σ^2besitzen Erwartungswert bzw. Varianz? (3,125; 1,875; 1,1719; 1,1719)

b) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten 0, 1, 2, 3, 4 oder 5 schwarze Kugeln zu ziehen? Wie lauten die entsprechenden Werte für weiße Kugeln? (0,0954; 0,2861; 0,3433; 0,2060; 0,0618; 0,0074)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 3 weiße Kugeln zu erhalten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 1, aber höchstens 2 schwarze Kugeln zu ziehen. (0,7985; 0,6294)

Lösung:

a)

Binominalverteilung

n=8; k=5; p_w=0,625; p_s=0,375

$$E_W(x) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{8}$$

$$E_s(x) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$$

$$V_W(x) = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{75}{64}$$

$$V_s(x) = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{75}{64}$$

b)

$$b(0; 5; 0{,}375) = \binom{5}{0} \cdot (0{,}375)^0 \cdot (0{,}625)^5 = 0{,}0954$$

$$b(1; 5; 0{,}375) = \binom{5}{1} \cdot (0{,}375)^1 \cdot (0{,}625)^4 = 0{,}2861$$

$$b(2; 5; 0{,}375) = \binom{5}{2} \cdot (0{,}375)^2 \cdot (0{,}625)^3 = 0{,}3433$$

$$b(3; 5; 0{,}375) = \binom{5}{3} \cdot (0{,}375)^3 \cdot (0{,}625)^2 = 0{,}2060$$

$$b(4; 5; 0{,}375) = \binom{5}{4} \cdot (0{,}375)^4 \cdot (0{,}625)^1 = 0{,}0618$$

$$b(5; 5; 0{,}375) = \binom{5}{5} \cdot (0{,}375)^5 \cdot (0{,}625)^0 = 0{,}0074$$

c)

Mindestens drei weiße:

$$P(W \geq 3) = 1 - P(W \leq 2) = 1 - b(0 - 2; 5; 0{,}625)$$

$$= 1 - b(0; 5; 0{,}625) - b(1; 5; 0{,}625) - b(2; 5; 0{,}625)$$

$$= 1 - \binom{5}{0} \cdot (0{,}675)^0 \cdot (0{,}325)^5 - \binom{5}{1} \cdot (0{,}675)^1 \cdot (0{,}325)^4 - \binom{5}{2} \cdot (0{,}675)^2 \cdot (0{,}325)^3$$

$$= 1 - 0{,}0074 - 0{,}0377 - 0{,}1564 = 0{,}7985$$

d)

mindestens 1, aber höchstens 2 schwarze Kugeln

$$P(1 \leq S \leq 2) = b(1; 5; 0{,}375) + b(2; 5; 0{,}375)$$

$$= \binom{5}{1} \cdot (0{,}375)^1 \cdot (0{,}625)^4 + \binom{5}{2} \cdot (0{,}375)^2 \cdot (0{,}625)^3$$

$$= 0{,}2861 + 0{,}3433 = 0{,}6294$$

Aufgabe 221:

In einer Fabrik werden serienmäßig Schrauben mit einem Ausschussanteil von 2% hergestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit finden wir in einer Zufallsstichprobe von 5 Schrauben genau0, 1, 2, 3, 4 bzw. 5 unbrauchbare? Welches Ergebnis leiten wir daraus für brauchbare Schrauben her? Welche Werte µ bzw. s^2 besitzen Erwartungswert bzw. Varianz? (0,9039; 0,0922; 0,0038; 0; 0; 0; 0,1; 0,098)

Lösung:

$$\mathrm{b}(0;5;0{,}02)=\binom{5}{0}\cdot(0{,}02)^0\cdot(0{,}98)^5=0{,}9039$$

$$\mathrm{b}(1;5;0{,}02)=\binom{5}{1}\cdot(0{,}02)^1\cdot(0{,}98)^4=0{,}0922$$

$$\mathrm{b}(2;5;0{,}02)=\binom{5}{2}\cdot(0{,}02)^2\cdot(0{,}98)^3=0{,}0038$$

$$\mathrm{b}(3;5;0{,}02)=\binom{5}{3}\cdot(0{,}02)^3\cdot(0{,}98)^2=0{,}0000$$

$$\mathrm{b}(4;5;0{,}02)=\binom{5}{4}\cdot(0{,}02)^4\cdot(0{,}98)^1=0{,}0000$$

$$\mathrm{b}(5;5;0{,}02)=\binom{5}{5}\cdot(0{,}02)^5\cdot(0{,}98)^0=0{,}0000$$

Erwartungswert:

$$E(X)=n\cdot p=5\cdot 0{,}02=0{,}1$$

$$V(X)=n\cdot p\cdot q=5\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98=0{,}098$$

Aufgabe 222:

Ein Großhändler garantiert, dass seine Taschenrechner zu höchstens vier Prozent einen Defekt aufweisen. Ein Einzelhändler bezieht regelmäßig Geräte von ihm. Zur Überprüfung der Qualität entnimmt er eine Stichprobe von zwölf Taschenrechnern. Ist mehr als ein Gerät defekt, schickt er die Lieferung zurück.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sendet der Einzelhändler die Lieferung zurück, wenn die Angabe des Großhändlers richtig ist? (0,0809)

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sendet der Einzelhändler die Lieferung zurück, wenn sich der Anteil defekter Geräte verdoppelt hat? (0,2487)

Lösung:

X = Anzahl der defekten Taschenrechner; n = 12

a) $p = 0{,}04$; $P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 0{,}0809$

b) $p = 0{,}08$; $P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 0{,}2487$

Aufgabe 223:

In Kuhdorf wohnen 80 männliche und 95 weibliche Personen. 40 % der Personen sind evangelisch. An einem Freitag überqueren 12 Personen gleichzeitig den einzigen Fußgängerüberweg.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind 5 von ihnen evangelisch ? (0,2270)

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es dabei geregnet ?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit war dies gerade um 12.10 Uhr ?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trug einer der Passanten einen Hut ?

Lösung:

a) Gegeben ist $p_{ev} = 0{,}4$ und $n = 12$.
X sei die Zahl der evangelischen Personen; X ist binomial verteilt.

$$P(X=5) = \binom{12}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^7 = \frac{12!}{5! \cdot 7!} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^7 \approx 0{,}2270$$

b bis d) sind Scherzfragen und lassen sich mathematisch nicht lösen.

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 224:

Eine Firma stellt Klobürsten her und verpackt sie in Kisten zu je 25 Stück. 4% aller Klobürsten sind nicht rot, sondern nur rosa.

Nun soll ein neuer Kunde beworben werden.

Der Kunde macht folgenden Vorschlag: Er entnimmt einer beliebigen Kiste der Lieferung 9 Klobürsten. Wenn höchstens zwei rosafarbene Klobürsten dabei sind, zahlt der Kunde 15€ pro Kiste, anderenfalls zahlt er nur 10€.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Firma 15€ pro Kiste erhält?

Lösung:

Wir brauchen die WS., dass weniger als drei Rosa-Bürsten gezogen werden. Nun ist es ja so, dass es keine Formel gibt, um „weniger" oder „höchstens" mit einer einzigen Formel zu berechnen. Wir müssen also „weniger als drei" in die drei Fälle aufteilen: „ keine, eine, zwei". Wir brauchen also die WS., dass keine Rosa-Bürste, eine Rosa-Bürste oder zwei Rosa-Bürsten gezogen werden. Es handelt sich um „ohne Zurücklegen", da jede Klobürste eine WS. von 4% hat, egal wieviel und was gezogen wird.

Also es sich um eine Binomialverteilung:

$$P(0\text{ Rosa-Bürsten}) = \binom{9}{0}\cdot 0{,}04^0\cdot 0{,}96^9 = 0{,}6925$$

$$P(1\text{ Rosa-Bürsten}) = \binom{9}{1}\cdot 0{,}04^1\cdot 0{,}96^8 = 0{,}2597$$

$$P(2\text{ Rosa-Bürsten}) = \binom{9}{2}\cdot 0{,}04^2\cdot 0{,}96^7 = 0{,}0432$$

$$\Rightarrow P(\text{weniger als 3 Rosa-Bürsten}) =$$
$$= P(X<3) = P(0)+P(1)+P(2) = 0{,}6925+0{,}2597+0{,}0432 = 0{,}9954 \triangleq 99{,}54\%$$

Aufgabe 225:

Bei einem Multiple-Choice-Test stehen jeder Frage 3 Antworten zum Ankreuzen gegenüber, von denen genau 1 richtig ist. Es darf auch nur eine Antwort angekreuzt werden.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden beim bloßen Raten mehr als die Hälfte der 4 Fragen beantwortet?

Lösung:

Gegeben ist $p_r = \frac{1}{3}$ und $p_f = \frac{2}{3}$.Es sei X die Zahl der richtig angekreuzten Antworten bei $n = 4$. X ist binomial verteilt.

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) = \binom{4}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^1 + \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 = \tfrac{8}{81} + \tfrac{1}{81} = \tfrac{9}{81} = \tfrac{1}{9} \approx 0{,}1111$$

Aufgabe 226:

Ein Unternehmen stellt Antriebswellen her. Einer Tagesproduktion werden zufällig n = 10 Antriebswellen entnommen und bzgl. ihres Durchmessers geprüft. Liegt der Durchmesser innerhalb der ingenieurstechnisch vorgeschriebenen Toleranzen, so ist die Welle verwendbar, ansonsten ist sie Ausschuss. Aus Erfahrung weiß man, dass in einer Tagesproduktion im Durchschnitt 2% der Wellen Ausschuss sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe vom Umfang n = 10 keine der Antriebswellen Ausschuss ist?

Lösung:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{10} = 0{,}8171$$

Aufgabe 227:

Nach Angaben der Post erreichen 90% aller Inlandsbriefe den Empfänger am nächsten Tag. Annalena verschickt acht Einladungen zu ihrem Geburtstag. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) (2) sind alle Briefe am nächsten Tag zugestellt?

b) (3) sind mindestens sechs Briefe am nächsten Tag zugestellt?

Lösung:

E: Brief wird am nächsten Tag zugestellt

$\mathrm{P}(\mathrm{E}) = 0{,}9$

a)

$b(8; 8; 0{,}9) = 0{,}4305$

b)

$b(6 - 8; 8; 0{,}9) = 0{,}9619$

Aufgabe 228:

Ein Staubsaugervertreter verkauft im Durchschnitt bei 10% der Vorstellungstermine einen Staubsauger. Morgen hat er 20 Vorstellungstermine. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verkauft er

a) mehr als 3,

b) höchstens 2,

c) mindestens 1 und weniger als 4 Staubsauger?

Lösung:

a)

$$P(S > 3) = 1 - P(S \leq 3) = 1 - (P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 2) + P(S = 3))$$

$$= 1 - \left[\binom{20}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{(20-0)} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{(20-1)} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{(20-2)} + \binom{20}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{(20-3)}\right]$$

$$= 1 - [0{,}1216 + 0{,}2702 + 0{,}2852 + 0{,}1901] = 0{,}1329$$

b)

$$P(S < 2) = (P(S = 0) + P(S = 1) + P(S = 2)$$

$$= \binom{20}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{(20-0)} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{(20-1)} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{(20-2)}$$

$$= 0{,}1216 + 0{,}2702 + 0{,}2852 = 0{,}6770$$

c)

$$P(S \geq 1 \ \wedge S < 4) = P(S = 1) + P(S = 2) + P(S = 3)$$

$$= \binom{20}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{(20-1)} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{(20-2)} + \binom{20}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{(20-3)}$$

$$= 0{,}2702 + 0{,}2852 + 0{,}1901 = 0{,}7455$$

Aufgabe 229:

In einer Firma sind zehn Kopiergeräte in Betrieb und arbeiten völlig unabhängig voneinander. Zu einem zufällig ausgewählten Zeitpunkt brennt eine grüne Kontrolllampe mit der Wahrscheinlichkeit 0,6.

Berechnen Sie, dass zu einem zufällig ausgewählten Zeitpunkt bei

a) genau fünf

b) höchstens zwei der zehn Geräte die grüne Lampe brennt.

c) Ermitteln Sie, bei wie vielen Geräten zu einem Zeitpunkt voraussichtlich die grüne Lampe brennt.

Lösung:

1. $B(10\,;0{,}60\,;5) = 0{,}20066$; 2. $P(k \leq 2) = \sum B(10\,;0{,}60\,;2) = 0{,}01229$; 3. $\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}60 = 6$

Aufgabe 230:

Man rechnet mit 5 % Schwarzfahrern auf einer bestimmten Buslinie. Wie viele Fahrgäste muss der Kontrolleur mindestens nach ihrem Fahrschein fragen, bis er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einen Schwarzfahrer ertappt hat?

Lösung:

$P(X \geq 1) \geq 0{,}9$

$1 - P(X = 0) \geq 0{,}9$

$-P(X = 0) \geq -0{,}1$

$P(X = 0) \leq 0{,}1$

$\binom{n}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{n-0} \leq 0{,}1$

$0{,}95^n \leq 0{,}1$

$\ln(0{,}95^n) \leq \ln(0{,}1)$

$n \cdot \ln(0{,}95) \leq \ln(0{,}1)$

$n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}95)}$

$n \geq 44{,}89$

also

$n \geq 45$

Normalverteilung

Aufgabe 231:

Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\bar{x}$ = 3200 g und s=800 g.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes

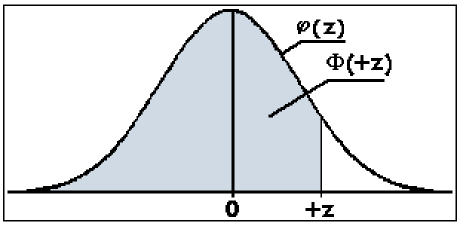
a) mehr als 3000 g (59,87%)

b) weniger als 2500 g (18,94%)

c) zwischen 4000 und 5000 g wiegt? (14,65%)

Lösung:

a) Folgende Tabelle wird verwendet:



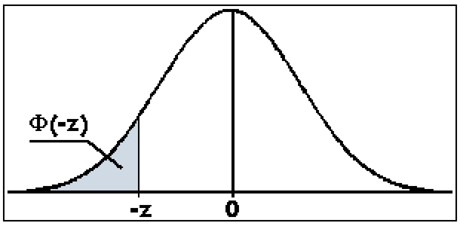
Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{3000 - 3200}{800} = 0{,}25$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,5987

b) Folgende Tabelle wird verwendet:



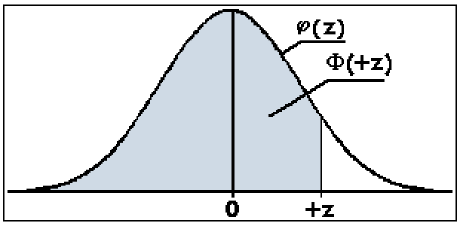
Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{2500 - 3200}{800} = 0{,}875 = 0{,}88$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,1894

c) Folgende Tabelle wird verwendet:



Transformation:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{4000 - 3200}{800} = 1{,}00$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,8413

$$z_2 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{5000 - 3200}{800} = 2{,}25$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,9878

Gesuchte Fläche:

0,9878-0,8413=0,1465

Aufgabe 232:

Wie schwer muss ein Neugeborenes sein (das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\bar{x}$ = 3200 g und s = 800 g.), damit es

a) zu den 15% schwersten (4032)

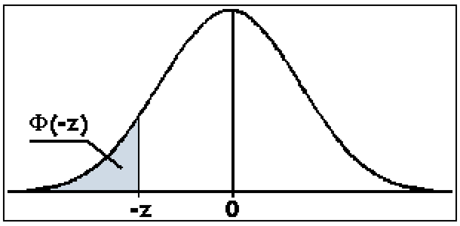
b) zu den 25% leichtesten gehört? (2664)

c) In welchem symmetrischen Bereich $[\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$ liegen die Gewichte von 90% aller Neugeborenen? (3200±1312)

Runden Sie jeweils auf 1g.

Lösung:

a) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 15% (0,1500) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=1,04

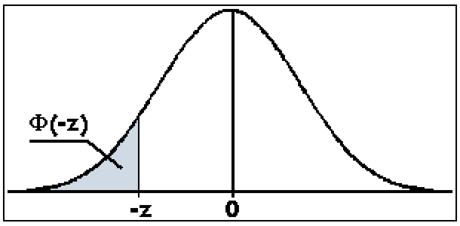
Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$z \cdot s = x - \bar{x}$

$x = \bar{x} + z \cdot s = 3200 + 1{,}04 \cdot 800 = 4.032$

b) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 25% (0,2500) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=0,67

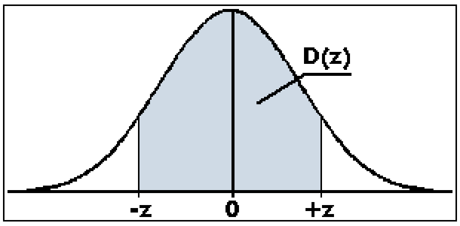
Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

$z \cdot s = x - \bar{x}$

$x = \bar{x} - z \cdot s = 3200 - 0{,}67 \cdot 800 = 2.664$

c) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 90% (0,9000) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=1,64

Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

$z \cdot s = x - \bar{x}$

$x = \bar{x} \pm z \cdot s = 3200 \pm 0{,}64 \cdot 800 = 3200 \pm 512$

oder [1888 g, 4512 g]

Aufgabe 233:

Die Äpfel in einer Lieferung wiegen durchschnittlich 180 g, mit einer Standardabweichung von 50 g. Man kann annehmen, dass das Gewicht eine normalverteilte Zufallsvariable ist. Wie viel Prozent der Äpfel wiegen

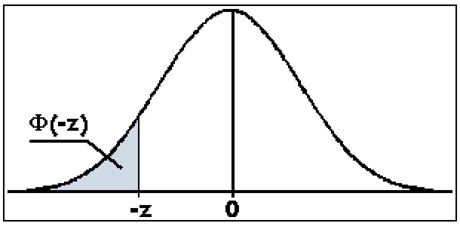
a) weniger als 150 g (0,2743)

b) mehr als 175 g (0,5398)

c) zwischen 200 und 250 g? (0,2638)

Lösung:

a) Folgende Tabelle wird verwendet:



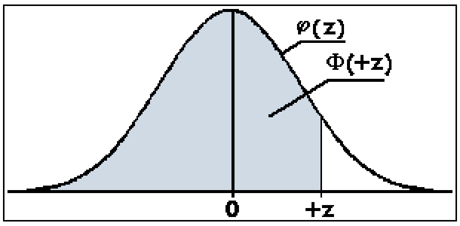
Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{150 - 180}{50} = 0{,}6$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,2743

b) Folgende Tabelle wird verwendet:



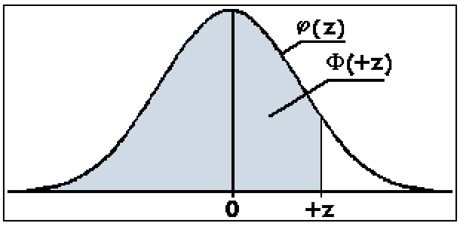
Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{175 - 180}{50} = 0{,}10$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,5398

c) Folgende Tabelle wird verwendet:



Transformation:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{200 - 180}{50} = 0{,}40$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,6554

$$z_2 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{250 - 180}{50} = 1{,}40$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,9192

Gesuchte Fläche:

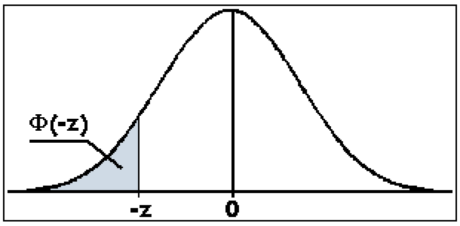
0,9192-0,6554=0,2638

Aufgabe 234:

Eine Maschine füllt Mehl in Säckchen ab. Sie ist auf ein Füllgewicht von 1005 g eingestellt, die Standardabweichung beträgt 4 g. Wie viel Prozent aller Säckchen enthalten weniger als 1000 g? (0,1056)

Lösung:

a) Folgende Tabelle wird verwendet:



Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{1000 - 1005}{4} = 1{,}25$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,1056

Aufgabe 235:

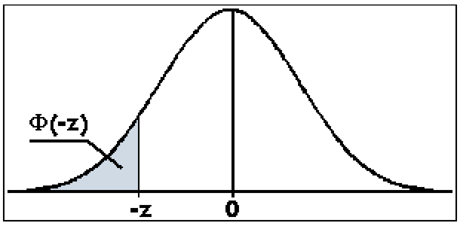
Die Lebensdauer eines Ersatzteils ist normalverteilt, mit $\bar{x}$ = 180 Tage und σ = 40 Tage.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer weniger als 3 Monate beträgt? (1 Monat = 30 Tage) (0,0122)

b) Bei wie viel Prozent aller Teile weicht die Lebensdauer um weniger als 1 Monat vom Erwartungswert ab (d.h., sie liegt zwischen 5 und 7 Monaten)? (0,5467)

Lösung:

a) Folgende Tabelle wird verwendet:



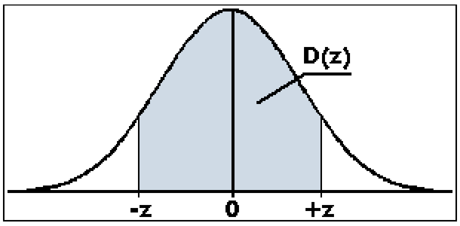
Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{90 - 180}{40} = 2{,}25$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,0122

b) Folgende Tabelle wird verwendet:



Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{150 - 180}{40} = 0{,}75$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,5467

Aufgabe 236:

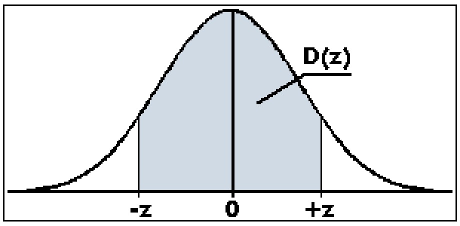
Eine Maschine erzeugt Holzplatten, die im Mittel 30 mm dick sind. Die Standardabweichung beträgt 0,6 mm.

a) Bei wie viel Prozent aller Platten liegt die Dicke zwischen 29,5 und 30,5 mm? (0,5935)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Platte dicker als 31 mm ist? (0,0475)

Lösung:

a) Folgende Tabelle wird verwendet:



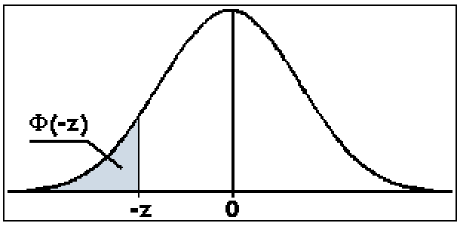
Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{30{,}5 - 30}{0{,}6} = 0{,}83$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,5935

b) Folgende Tabelle wird verwendet:



Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{31 - 30}{0{,}6} = 1{,}67$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,0475

Aufgabe 237:

Die Köpergröße eines bestimmten Jahrgangs ist normalverteilt mit den Werten μ = 95 cm und σ=7cm. (Man sagt dazu auch „die Körpergröße ist (95cm, 7cm) verteilt.)

Wie viel Prozent dieser Kinder sind im Mittel

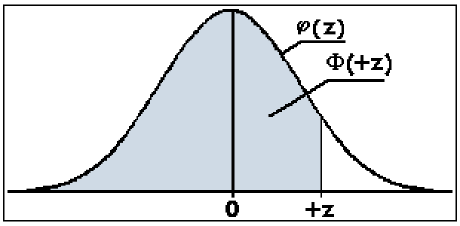
a) kleiner als 1 m, (0,7611)

b) größer als 1,05, (0,0764)

c) zwischen 88 cm und 103 cm? (0,7142)

Lösung:

a) Folgende Tabelle wird verwendet:



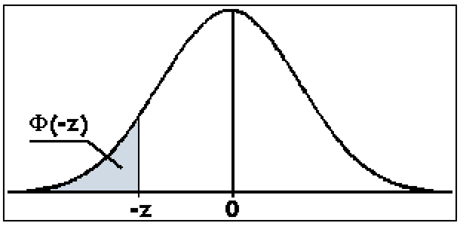
Transformation:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{100 - 95}{7} = 0{,}71$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,7611

b) Folgende Tabelle wird verwendet:



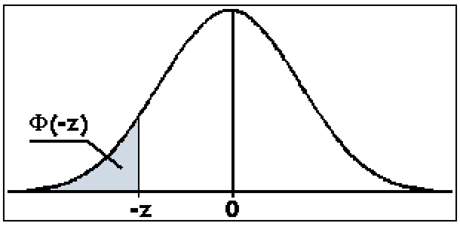
Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{105 - 95}{7} = 1{,}43$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,0764

c) Folgende Tabelle wird verwendet:



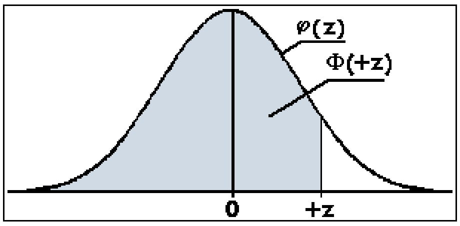
Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{88 - 95}{7} = 1{,}00$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,1587

Folgende Tabelle wird verwendet:



Transformation:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{103 - 95}{7} = 1{,}14$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,8729

Die Fläche errechnet sich aus:

0,8729-0,1587=0,7142

Aufgabe 238:

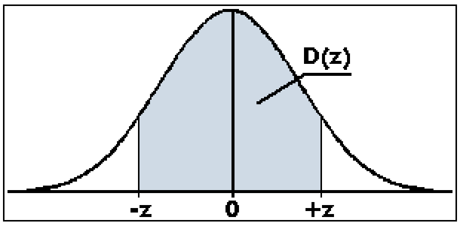
Eine Maschine stellt Nägel her. Die Länge der Nägel ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 8,00 cm und der Standardabweichung σ = 0,15 cm.

a) Bei wieviel Prozent der Nägel weicht die Länge höchstens um ε = 0,20 cm vom Erwartungswert μ ab? (0,8165)

b) Wie sind die symmetrischen Toleranzgrenzen festgelegt, wenn man weiß, dass 90% der Produktion zum Verkauf freigegeben werden? [7,754cm; 8,246cm]

Lösung:

a) Folgende Tabelle wird verwendet:



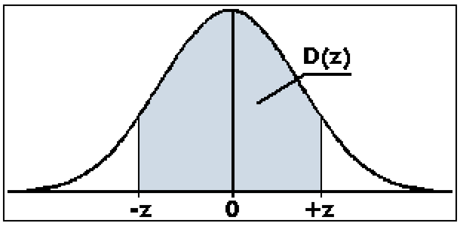
Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{8{,}2 - 8}{0{,}15} = 1{,}33$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,8165

b) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 90% (0,9000) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=1,64

Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z \cdot s = x - \bar{x}$$

$$x = \bar{x} \pm z \cdot s = 8 \pm 1{,}64 \cdot 0{,}15 = 8 \pm 0{,}246$$

oder [7,754cm; 8,246cm]

a) 81,65%

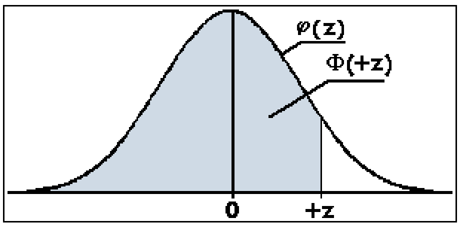
b) 8 ± 0,25 cm

Aufgabe 239:

Die Lufttemperatur T im Juni sei normalverteilt mit dem Mittelwert 20 Grad und der Standardabweichung 3 Grad. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass sie zwischen 21 und 26 Grad liegt? (0,3479)

Lösung:

Folgende Tabelle wird verwendet:



Transformation:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{21 - 20}{3} = 0{,}33$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,6293

$$z_2 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{26 - 20}{3} = 2{,}00$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,9772

Gesuchte Fläche:

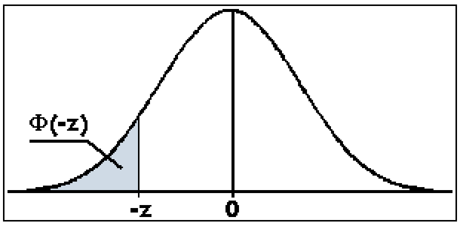
0,9772-0,6293=0,3479

Aufgabe 240:

Das Gewicht G von 800 Schülern ist normalverteilt mit dem Mittelwert 66 kg und der Standardabweichung 5 kg. Bestimme die Anzahl N von Schülern mit einem Gewicht (a) zwischen 65 und 70 kg (294), (b) über 72 kg (92)

Lösung:

a) Folgende Tabelle wird verwendet:



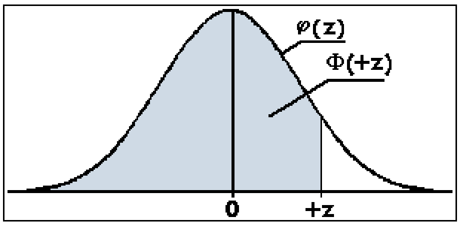
Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{65 - 66}{5} = 0{,}2$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,4207

Folgende Tabelle wird verwendet:



Transformation:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{70 - 66}{5} = 0{,}8$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

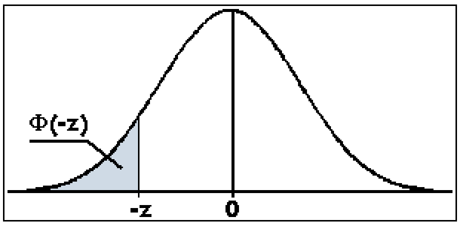
0,7881

Die Fläche errechnet sich aus:

0,7881-0,4207=0,3674

$800 \cdot 0{,}3674 = 294$

b) Folgende Tabelle wird verwendet:



Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{72 - 66}{5} = 1{,}20$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,1151

$800 \cdot 0{,}1151 = 92$

Aufgabe 241:

Ein Hersteller von Distanzplättchen gibt an, dass die Dicke der von ihm gefertigten Plättchen normalverteilt ist. Auch Mittelwert und Standardabweichung sind ihm aus langjähriger Erfahrung bekannt: $\mu = 3{,}25\ mm$ und $\sigma = 0{,}25\ mm$.

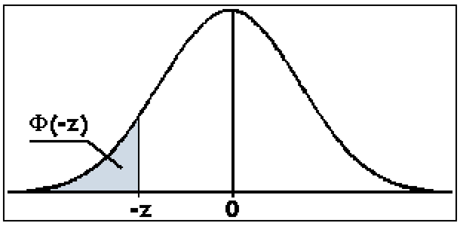
Ein Kunde fragt an, ob Unterlegscheiben innerhalb der folgenden Toleranz geliefert werden können: Mindestwert: 3,00 mm und Höchstwert: 3,60 mm

Der Hersteller kann die Plättchen nach ihren Dicken sortieren.

Wie viel Prozent seiner Fertigung muss er anderweitig verkaufen, wenn er diesen Kunden beliefert? (0,2395)

Lösung:

Folgende Tabelle wird verwendet:



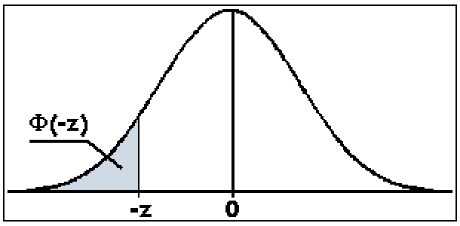
Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{3{,}00 - 3{,}25}{0{,}25} = 1$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,1587

Folgende Tabelle wird verwendet:



Transformation:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{3{,}60 - 3{,}25}{0{,}25} = 1{,}40$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,0808

Die Fläche errechnet sich aus:

0,1587+0,0808=0,2395

Aufgabe 242:

Die Brenndauer von Leuchtstoffröhren ist normalverteilt mit folgenden Parametern:

$\mu = 900\ h$ und $\sigma = 100\ h$.

Bestimmen Sie die Anteile für Lampen, die

(a) weniger als 650 h brennen (0,0062)

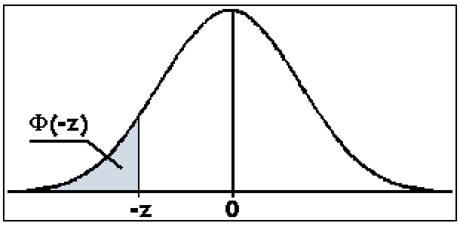
(b) länger als 1200 h brennen (0,0013)

(c) zwischen 750 h und 1050 h lang brennen (0,8664)

(d) weniger als 800 h oder länger als 1200 h brennen (0,1600)

Lösung:

a) Folgende Tabelle wird verwendet:



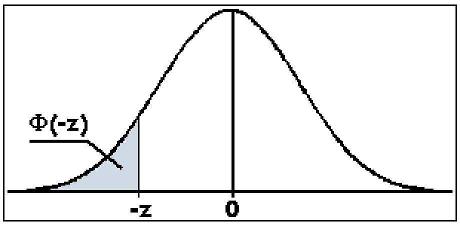
Transformation:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{650 - 900}{100} = 2{,}50$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,0062

b) Folgende Tabelle wird verwendet:



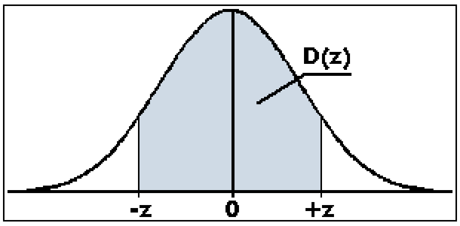
Transformation:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{1200 - 900}{100} = 3{,}0$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,0013

c) Folgende Tabelle wird verwendet:



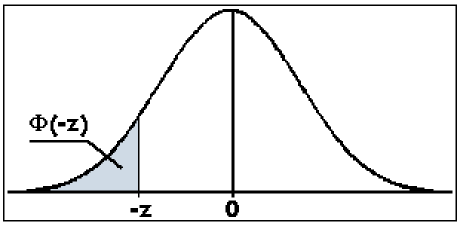
Transformation:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{1050 - 900}{100} = 1{,}5$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,8664

d) Folgende Tabelle wird verwendet:



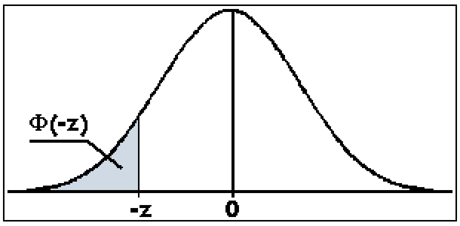
Transformation:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{800 - 900}{100} = 1{,}00$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,1587

Folgende Tabelle wird verwendet:



Transformation:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{1200 - 900}{100} = 3{,}00$$

Diesen z-Wert in der Tabelle nachschauen:

0,0013

Die Fläche errechnet sich aus:

0,1587+0,0013=0,1600

Aufgabe 243:

Ein über lange Zeit beobachteter Härteprozess von Werkstücken ergab für die Härtewertefolgende Parameter: $\mu = 58{,}0\,HRC$ und $\sigma = 1{,}0\,HRC$. Sie bekommen von Ihrem Fertigungsleiter den Auftrag, die folgenden Werte zu bestimmen:

Bis zu welchem Höchstwert G_0 liegen die HRC-Werte in der künftigen Fertigung

(a) mit 75%-iger Wahrscheinlichkeit (58,67)

(b) mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit (59,64)

(c) mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit (60,33)

Ab welchem Mindestwert G_u liegen die HRC-Werte

(d) mit 80%-iger Wahrscheinlichkeit (57,16)

(e) mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit (56,36)

(f) mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit (55,67)

In welchen symmetrischen Intervallen G_u bis G_0 liegen die HRC-Härtewerte in der künftigen Fertigung

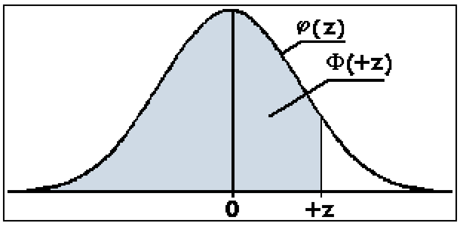
(g) mit 60%-iger Wahrscheinlichkeit (57,16-58,84)

(h) mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit (56,04-59,96)

(i) mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit (55,42-60,58)

Lösung:

a) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 75% (0,7500) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=0,67

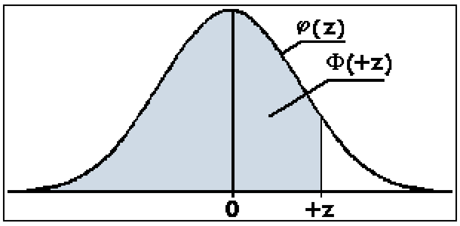
Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z \cdot s = x - \bar{x}$$

$$x = \bar{x} + z \cdot s = 58{,}0 + 0{,}67 \cdot 1 = 58{,}67$$

b) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 95% (0,9500) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=1,64

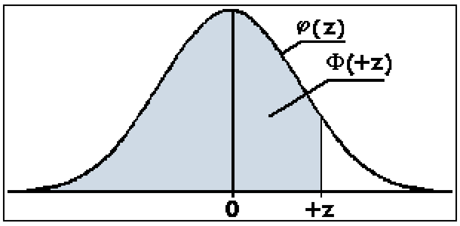
Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z \cdot s = x - \bar{x}$$

$$x = \bar{x} + z \cdot s = 58{,}0 + 1{,}64 \cdot 1 = 59{,}64$$

c) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 99% (0,9900) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=2,33

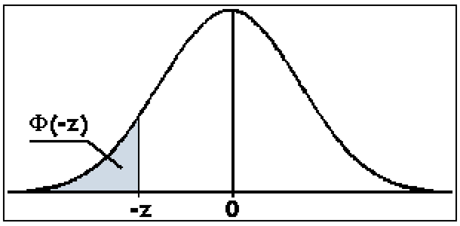
Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z \cdot s = x - \bar{x}$$

$$x = \bar{x} + z \cdot s = 58{,}0 + 2{,}33 \cdot 1 = 60{,}33$$

d) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 20% (0,2000) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=0,84

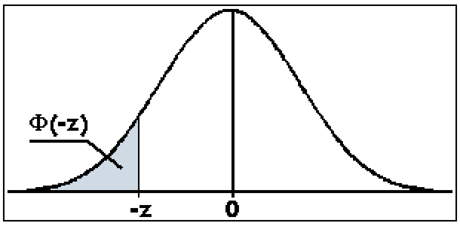
Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z \cdot s = x - \bar{x}$$

$$x = \bar{x} - z \cdot s = 58{,}0 - 0{,}84 \cdot 1 = 57{,}16$$

e) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 5% (0,0500) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=1,64

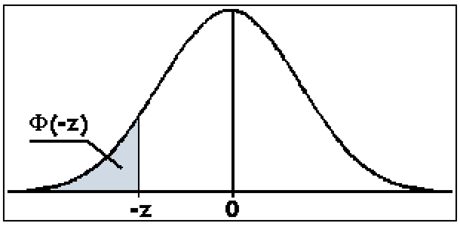
Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z \cdot s = x - \bar{x}$$

$$x = \bar{x} - z \cdot s = 58{,}0 - 1{,}64 \cdot 1 = 56{,}36$$

f) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 1% (0,0100) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=2,33

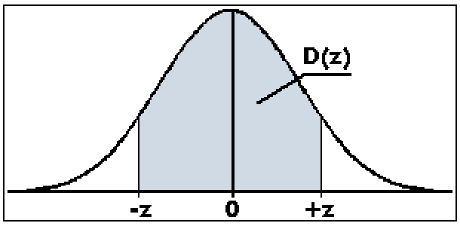
Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z \cdot s = x - \bar{x}$$

$$x = \bar{x} - z \cdot s = 58{,}0 - 2{,}33 \cdot 1 = 55{,}67$$

g) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 60% (0,6000) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=0,84

Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

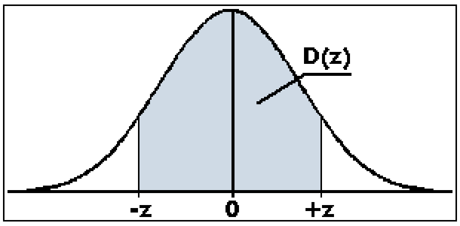
$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z \cdot s = x - \bar{x}$$

$$x = \bar{x} \pm z \cdot s = 58{,}0 \pm 0{,}84 \cdot 1 = 58{,}0 \pm 0{,}84$$

oder [57,16, 58,84]

h) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 95% (0,9500) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=1,96

Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

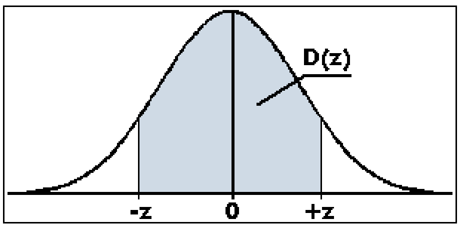
$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z \cdot s = x - \bar{x}$$

$$x = \bar{x} \pm z \cdot s = 58{,}0 \pm 1{,}96 \cdot 1 = 58{,}0 \pm 1{,}96$$

oder [56,04, 59,96]

i) Folgende Tabelle wird verwendet:



Suchen von 99% (0,9900) oder der diesem am nächsten liegenden Wert in der Tabelle:

z=2,58

Transformationsformel nach der unbekannten auflösen:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z \cdot s = x - \bar{x}$$

$$x = \bar{x} \pm z \cdot s = 58{,}0 \pm 2{,}58 \cdot 1 = 58{,}0 \pm 2{,}58$$

oder [55,42, 60,58]

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 244:

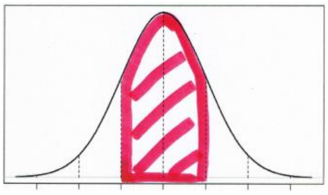
Ein 3D-Drucker erzeugt Klobrillen, die im Mittel 30 mm dick sind. Die Standardabweichung beträgt 0,6 mm. Der ganze Produktionsprozess kann als normalverteilt angesehen werden.

a) Bei wieviel Prozent aller Platten liegt die Dicke zwischen 29,5 und 30,5 mm?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Platte dicker als 31 mm ist?

Lösung:

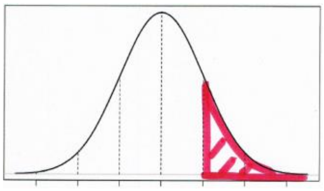
a) Es ergibt sich eine symmetrische Fläche:



$$z = \frac{30{,}5 - 30}{0{,}6} = 0{,}83$$

$\rightarrow 0{,}5935$

b) Es ergibt sich folgende Fläche:



$$z = \frac{31{,}0 - 30}{0{,}6} = 1{,}67$$

$\rightarrow 0{,}0475$

Aufgabe 245: (12)

Wie groß muss ein Student in Mathematanien sein, damit er

a) (4) zu den 20% kleinsten

b) (4) zu den 10% größten Studenten gehört?

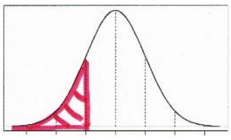
c) (4) In welchem symmetrischen Bereich [μ-ε, μ+ε] liegen die Größen von 95% aller Studenten?

Dabei haben die Studenten ein arithmetisches Mittel 175 cm von und eine Standardabweichung von 7,5 cm.

Lösung:

Normalverteilung

a) In der entsprechenden Tabelle nach 0,2000 oder dem am nächsten liegenden Wert suchen.

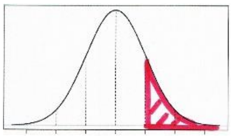


$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$x = \bar{x} - z \cdot s = 175 - 0{,}84 \cdot 7{,}5 = 168{,}7 \text{ cm}$$

b)

In der entsprechenden Tabelle nach 0,1000 oder dem am nächsten liegenden Wert suchen.

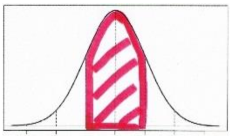


$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$x = \bar{x} + z \cdot s = 175 + 1{,}28 \cdot 7{,}5 = 184{,}6 \text{ cm}$$

c)

In der entsprechenden Tabelle nach 0,9500 oder dem am nächsten liegenden Wert suchen.



$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$x = \bar{x} \pm z \cdot s = 175 \pm 1{,}96 \cdot 7{,}5 = 175 \pm 14{,}7\text{cm}$$

Aufgabe 246:

Dichtungsringe für den Audi-Motor müssen einen Durchmesser d: 493 mm <= d <= 496 mm haben. Von einer Lieferung von 10.000 Dichtungsringen sei bekannt, dass der Durchmesser normalverteilt ist mit einem Mittelwert von 495 mm und der Standardabweichung 1 mm. Wie viele Dichtungsringe sind unbrauchbar?

Lösung:

$$z = \frac{493 - 495}{1} = 2 \ \rightarrow 0{,}0228$$

$$z = \frac{496 - 495}{1} = 1 \ \rightarrow 0{,}1587$$

$$1 - 0{,}0228 - 0{,}1587 = 0{,}8185$$

$10.000 \cdot 0{,}8185 = 8185 \text{ brauchbar}$

$10.000 - 8185 = 1815 \text{ unbrauchbar}$

Aufgabe 247:

Bei der Befüllung von Zuckertüten durch eine Maschine ist das Gewicht normalverteilt mit Mittelwert 1000 g und Standardabweichung 6 g.

a) Wie viele Zuckertüten enthalten weniger als 995 g?

b) Der Produzent möchte eine Garantie geben, so dass eine Tüte mit zu geringer Füllung umgetauscht werden kann. Welche Mindestfüllmenge sollte er garantieren, wenn er, besonders kritische Kunden vorausgesetzt, höchstens ein Prozent an Reklamationen haben will?

Lösung:

a)

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{995 - 1000}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}83 \rightarrow 0{,}2033$$

b)

Deshalb muss 1,0% unten berechnet werden.

In der Tabelle nach 0,0100 schauen und en z-Wert ablesen:

$z = 2{,}33$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$x = \bar{x} - z \cdot s = 1000 - 2{,}33 \cdot 6 = 986{,}02\text{g}$$

Aufgabe 248:

Gegeben ist ein Bolzen mit einem Mittelwert von $\bar{x} = 3{,}0 \text{ cm}$. Dieser darf nur ±0,1cm vom arithmetischen Mittel abweichen, damit er nicht als Ausschuss gilt. Die Standardabweichung beträgt s=0,01 cm. Wie hoch darf die Standardabweichung höchstens werden, damit höchstens ein Ausschuss von 5% entsteht?

Lösung:

Symmetrische Intervall mit z=1,96

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$s = \frac{x - \bar{x}}{z} = \frac{3{,}1 - 3{,}0}{1{,}96} = 0{,}051$$

Aufgabe 249:

In einer Form werden Platten gefertigt, bei denen das Konstruktionsmaß der Länge *X* mit 3600 mm angegeben ist. Aus statistischen Langzeituntersuchungen ist bekannt, dass die Zufallsgröße X normalverteilt ist. Die Verteilungsparameter betragen

$\bar{x} = 3600 \text{ mm}$ und $s = 10 \text{ mm}$

a) Wie groß ist der prozentuale Anteil der Platten, deren Länge X im Intervall $3600 \leq x \leq 3625$ liegt?

b) Ein Toleranzintervall der Form $3600 - d \leq X \leq 3625 + d$ soll höchstens 5 % Ausschuss ergeben. Wie groß muss d gewählt werden?

Lösung:

a)

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{s} = \frac{3625 - 3600}{10} = 2{,}5$$

In Tabelle nachschauen:

$0{,}9938$

$0{,}9938 - 0{,}5000 = 0{,}4938$

b)

Suchen von 0,9500 in der symmetrische Tabelle, daraus ergibt sich:

$z = 1{,}96$

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

$z \cdot s = x_i - \bar{x}$

$x_i = \bar{x} \pm z \cdot s = 3600 \pm 1{,}96 \cdot 10 = 3600 \pm 19{,}6$

Zufallsvariablen

Aufgabe 250:

Auf dem Schulhof eines Berufskollegs findet trotz Verbotes hin und wieder ein interessantes Glücksspiel statt.

Spielregeln:

Der Einsatz pro Spiel beträgt 2 €.

Der Spieler setzt zuerst eine der Zahlen 1, 2, 3, ... , 6.

Anschließend wirft er dreimal mit einem Würfel.

Fällt die gesetzte Zahl nicht, ist der Einsatz verloren.

Fällt die gesetzte Zahl einmal, so erhält er seinen Einsatz zurück.

Fällt die gesetzte Zahl zweimal, so erhält er den doppelten Einsatz.

Fällt die gesetzte Zahl dreimal, so erhält er den dreifachen Einsatz.

Die wohl wichtigste Frage, die sich bei diesem Spiel stellt, ist die Frage nach den Gewinnaussichten. Dies möchten alle Schüler und Schülerinnen wissen, und zwar die, die spielen und die, die die Bank haben.

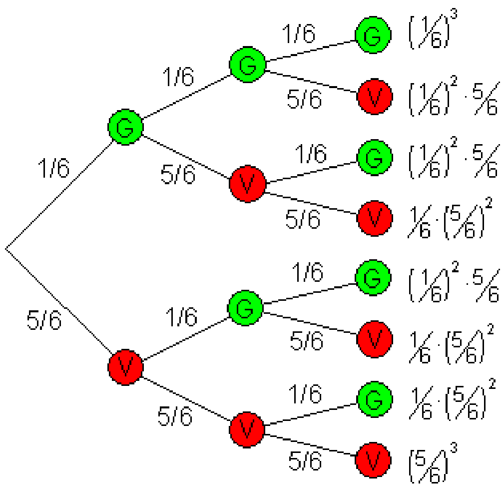
Lösung:

Die wohl wichtigste Frage, die sich bei diesem Spiel stellt, ist die Frage nach den Gewinnaussichten. Dies möchten alle Schüler und Schülerinnen wissen, und zwar die, die spielen und die, die die Bank haben. Diese Frage lässt sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung beantworten.

Die Zufallsvariable X ist der Nettogewinn, das ist der an den Spieler auszuzahlende Betrag abzüglich des Einsatzes von 2 €.

Mit Hilfe des dreistufigen Baumdiagramms und der Pfadregel errechnet man die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn bzw. einen Verlust.

Es gilt: G = Gewinn, V = Verlust.



x_i	$P(X = x_i)$
-2	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}5787$
0	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}3472$
2	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \approx 0{,}0694$
4	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0{,}00463$

Zur Berechnung der Gewinnaussichten multipliziert man die Werte der Zufallsvariablen mit ihren zugehörigen Wahrscheinlichkeiten und addiert die Ergebnisse

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
-2	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$	$-\frac{250}{216}$
0	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$	0
2	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$	$\frac{30}{216}$
4	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$	$\frac{4}{216}$
	Mittelwert	$-\frac{216}{216} = -1$

Die errechnete Zahl von -1 sagt aus, dass langfristig, also bei vielen Wiederholungen des Spiels ein Verlust von 1 Euro pro Spiel für den Spieler zu erwarten ist.

Diesen Betrag kassiert natürlich die Bank.

Man bezeichnet das Spiel aus diesem Grund auch als unfair, da langfristig Gewinn und Verlust nicht ausgeglichen werden.

Gewinn und Verlust wären bei einem Mittelwert von 0 ausgeglichen. Das wäre dann ein faires Spiel. Das könnte man z.B. durch eine Gewinnerhöhung erreichen

Aufgabe 251:

Der Erwartungswert, bei dem oben vorgestellten Würfelspiel war E(X) = -1. Das Spiel ist also unfair.

Wie hoch müsste der Einsatz für ein Spiel sein, damit man das Spiel als fair bezeichnen könnte?

Die Auszahlungen bleiben vom Betrag her gleich:

Fällt die gesetzte Zahl nicht, ist die Auszahlung 0 €.

Fällt die gesetzte Zahl einmal, so ist die Auszahlung 2 €.

Fällt die gesetzte Zahl zweimal, so ist die Auszahlung 4 €.

Fällt die gesetzte Zahl dreimal, so ist die Auszahlung 6 €.

Lösung:

Fair ist das Spiel dann, wenn auf lange Sicht genau soviel ausgespielt wird, wie eingenommen wird.

Dazu berechnen wir den Erwartungswert der Auszahlungen.

E(X) = 1 bedeutet, dass über lange Sicht im Mittel 1 € pro Spiel ausgezahlt wird.

Bei einem Einsatz von ebenfalls 1 € pro Spiel, ist das Spiel fair

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
0	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$	0
2	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$	$\frac{150}{216}$
4	$3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$	$\frac{60}{216}$
6	$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$	$\frac{6}{216}$
	Erwartungswert $E(X)$	$\frac{216}{216} = 1$

Aufgabe 252:

Jedes Los gewinnt!

Bei der Abi - Abschlussfeier muss jeder der 50 Teilnehmer ein Los kaufen.

Der 1. Preis hat einen Wert von 100 €, der 2. von 25 € und der 3. von 10 €.

Jeder, der keinen dieser Gewinne bekommt, erhält einen Trostpreis in Höhe von 1€.

Wie teuer müsste ein Los sein, damit Einnahmen und Ausgaben überein stimmen?

Jedes Los wird für 5 € verkauft.

Der Erlös geht ans Friedensdorf. Wie groß ist der Erlös?

Lösung:

Der Erwartungswert wird berechnet:

E(X) = 3,64 bedeutet, dass jedes Los 3,65 € kosten muss, damit die Ausgaben gedeckt werden.

Bei einem Lospreis von 5 €und 50 verkauften Losen entsteht ein Gewinn von 50(5 - 3,64) = 68 €

Dieser Betrag geht ans Friedensdorf.

Aufgabe 253:

Eine Urne enthält eine rote, eine schwarze und eine grüne Kugel.

Es wird solange ohne zurücklegen eine Kugel gezogen, bis eine grüne Kugel erscheint.

Wird die grüne Kugel im 1. Zug gezogen, so ist die Ausspielung 2 €.

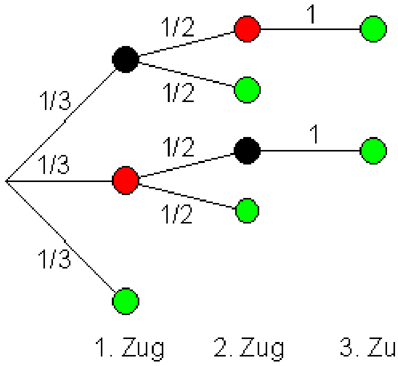
Wird die grüne Kugel im 2. Zug gezogen, so ist die Ausspielung 1 €.

Wird die grüne Kugel im 3. Zug gezogen, so ist die Ausspielung 0 €.

Wie hoch muss der Einsatz sein, damit es sich um ein faires Spiel handelt?

Lösung:

Mit Hilfe des dreistufigen Baumdiagramms und der Pfadregel errechnet man die Wahrscheinlichkeiten dafür eine grüne Kugel zu ziehen.



Zug	Ergebnisse	P	Ausspielung X
1	(g)	$\frac{1}{3}$	2€
2	(sg);(rg)	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	1€
3	(srg);(rsg)	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$	0€

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\underline{\underline{1}}$$

Der Erwartungswert der Ausspielung ist E(X) = 1.

Wenn es sich um ein faires Spiel handeln soll, muss der Einsatz ebenfalls 1 € betragen.

Aufgabe 254:

Ein Gerät besteht aus drei komplizierten Systemen, die unabhängig voneinander ausfallen können. Die auf die Wartungszeit bezogene Ausfallswahrscheinlichkeit für jedes der Systeme sei 1%. Die Zufallsgröße X kennzeichne die Anzahl der ausfallenden Systeme.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable X in tabellarischer Form an.

b) Berechnen Sie die erwartete Anzahl an ausfallenden Systemen.

c) Berechnen Sie die Standardabweichung von X.

Lösung:

e_k	$\overline{s_1}\ \overline{s_2}\ \overline{s_3}$	$s_1\ \overline{s_2}\ \overline{s_3}$ $\overline{s_1}\ s_2\ \overline{s_3}$ $\overline{s_1}\ \overline{s_2}\ s_3$	$\overline{s_1}\ s_2\ s_3$ $s_1\ \overline{s_2}\ s_3$ $s_1\ s_2\ \overline{s_3}$	$s_1\ s_2\ s_3$
x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$0{,}99^3 =$ $0{,}970299$	$3 * 0{,}99^2 * 0{,}01 =$ $0{,}029403$	$3 * 0{,}99 * 0{,}01^2 =$ $0{,}000297$	$0{,}01^3 = 0{,}000001$

s_1 – System 1 ist ausgefallen.

$\overline{s_1}$ – System 1 ist nicht ausgefallen.

$E(X) = 0{,}03$

$V(X) \approx 0{,}03$

$\sigma(X) \approx 0{,}17$

Aufgabe 255:

Eine Firma verpflichtet sich, für ein von ihr verkauftes Gerät ein Jahr lang kostenlos die Reparaturen auszuführen, die wegen Materialfehler anfallen.

Bei drei Einzelteilen e_1, e_2, e_3 des Gerätes können innerhalb eines Jahres Ausfälle auftreten und zwar erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit 20%.

Es wird angenommen, dass die Ausfälle der Einzelteile unabhängig sind und ein repariertes Teil bis zum Ende der Garantiezeit nicht noch einmal ausfällt. Die Reparatur von e_1 kostet die Firma 5,00 €, die von e_2 4,00 € und die von e_3 1,00 €.

X bezeichne die Reparaturkosten.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable X in tabellarischer Form an.

b) In welcher Höhe müssen die zu erwartenden Reparaturkosten bei der Preiskalkulation für das Gerät berücksichtigt werden?

Lösung:

e_k	$\bar{e}_1\,\bar{e}_2\,\bar{e}_3$	$e_1\,\bar{e}_2\,\bar{e}_3$	$\bar{e}_1\,e_2\,\bar{e}_3$	$\bar{e}_1\,\bar{e}_2\,e_3$ $e_1\,e_2\,\bar{e}_3$	$e_1\,\bar{e}_2\,e_3$	$\bar{e}_1\,e_2\,e_3$	$e_1\,e_2\,e_3$
x_i	0	1	4	5	6	9	10
$P(X=x_i)$	$0{,}8^3$	$0{,}2 * 0{,}8^2$	$0{,}2 * 0{,}8^2$	$0{,}2 * 0{,}8^2 +$ $0{,}2^2 * 0{,}8$	$0{,}2^2 * 0{,}8$	$0{,}2^2 * 0{,}8$	$0{,}2^3$

e_1 – Das Gerät ist ausgefallen.

$\bar{e}_1$ – Das Gerät ist nicht ausgefallen.

Aufgabe 256:

Eine Versicherung bietet eine Risikoversicherung an.

Der 50jährige Robert Müller möchte sein mit Hilfe eine Darlehens gebautes Haus (Wert 200.000 €) für ein Jahr gegen Todesfall absichern. Die Versicherung rechnet mit einem erwarteten Jahresgewinn von 400 € und einer Sterbewahrscheinlichkeit von 0,008.

Welche Jahresprämie verlangt die Versicherung von Robert Müller?

Lösung:

$E(X) = 0{,}008 * (p - 200.000) + p * 0{,}092$

$\rightarrow 400 = -1600 + 0{,}008{*}p + 0{,}092{*}p = -1600 + p$

$\rightarrow p = 2000$

$p = 2000$ €

Aufgabe 257:

Es sollen vier Teile eines Geräts nacheinander auf Funktionstüchtigkeit überprüft werden. Jedes Teil kann unabhängig von den anderen Teilen mit der Wahrscheinlichkeit 10% ausfallen.

X kennzeichne die Anzahl der überprüften Teile bis zum eventuellen ersten defekten Teil.

Bestimmen Sie

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable X in tabellarischer Form an.

b) Wie viele Teile müssen im Durchschnitt überprüft werden, bis das erste defekte Teil gefunden wird?

c) Berechnen Sie die Standardabweichung von X.

Lösung:

e_k	t_1	$\overline{t_1}\, t_2$	$\overline{t_1}\, \overline{t_2}\, t_3$	$\overline{t_1}\, \overline{t_2}\, \overline{t_3}\, \overline{t_4}$ $\overline{t_1}\, \overline{t_2}\, \overline{t_3}\, t_4$
x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,1	$0{,}9 * 0{,}1 = 0{,}09$	$0{,}9^2 * 0{,}1 = 0{,}081$	$0{,}9^3 * 0{,}1 + 0{,}9^4 = 0{,}729$

t_1 – Erstes geprüftes Teil ist defekt.

$\overline{t_1}$ – Erstes geprüftes Teil ist nicht defekt.

$E(X) = 3{,}439$	$V(X) \approx 1{,}026$	$\sigma(X) \approx 1{,}01$

Aufgabe 258:

Die Firma Noll produziert Transistoren. Es ist ihr bekannt, dass von 10 in einem Karton verpackten Transistoren 4 defekt sind. Bei der Kontrolle werden zufällig 3 Transistoren mit einem Griff gezogen.

Die Zufallsgröße X gebe die Anzahl der defekten Transistoren an, die beim ersten Griff gefunden werden.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable X in tabellarischer Form an.

b) Wie viele defekte Teile werden im Durchschnitt bei der Kontrolle entdeckt?

c) Berechnen Sie die Standardabweichung von X.

Lösung:

e_k	$\overline{s_1}\,\overline{s_2}\,\overline{s_3}$	$s_1\,\overline{s_2}\,\overline{s_3}$ $\overline{s_1}\,s_2\,\overline{s_3}$ $\overline{s_1}\,\overline{s_2}\,s_3$	$\overline{s_1}\,s_2\,s_3$ $s_1\,\overline{s_2}\,s_3$ $s_1\,s_2\,\overline{s_3}$	$s_1\,s_2\,s_3$
x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	6/10*5/9*4/8 =120/720	4/10*6/9 *5/8 + 6/10*4/9*5/8 + 6/10*5/9*4/8 = 1/2	6/10*4/9*3/8 + 4/10*6/9*3/8 + 4/10*3/9*6/8 =3/10	4/10*3/9*2/8 = 1/30

s_1 – Der erste Transistor ist defekt.

$\overline{s_1}$ – Der erste Transistor ist nicht defekt.

$\boxed{E(X) = 1{,}2}$ $\boxed{V(X) = 0{,}56}$ $\boxed{\sigma(X) \approx 0{,}75}$

Aufgabe 259:

Zwei Laplace-Würfel werden unabhängig geworfen. X bezeichne die gewürfelte Augenzahl.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable X in tabellarischer Form an.

b) Welche Augensumme ist im Durchschnitt zu erwarten?

c) Berechnen Sie die Standardabweichung von X.

Lösung:

e_k	(1,1)	(1,2) (2,1)	(2,2) (1,3) (3,1)	(2,3) (3,2) (1,4) (4,1)	(3,3) (1,5) (5,1) (2,4) (4,2)	(1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3)	(2,6) (6,2) (3,5) (5,3) (4,4)	(3,6) (6,3) (4,5) (5,4)	(4,6) (6,4) (5,5)	(5,6) (6,5)	(6,6)
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$\boxed{E(X) = 7}$ $\boxed{V(X) = 5\ 5/6}$ $\boxed{\sigma(X) \approx 2{,}42}$

Aufgabe 260:

Bei einer Jahrmarktbude wird folgendes Spiel angeboten:

Beim Werfen zweier Laplace - Würfel erhält der Spieler 1 € für Augensumme 10, 3 € für Augensumme 11 und 6 € für Augensumme 12 ausbezahlt. Sonst bezahlt der Spieler 0,5 €.

Spiel 1: X kennzeichne den Reingewinn des Spielers.

Eine zweite Jahrmarktbude bietet ein 2. Spiel an.

Beim Werfen zweier Laplace - Würfel erhält der Spieler 0,5 € für Augensumme 10, 4 € für Augensumme 11 und 5,5 € für Augensumme 12 ausbezahlt. Sonst bezahlt der Spieler 0,5 €.

Spiel 2: Y kennzeichne den Reingewinn des Spielers beim 2. Spiel.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Zufallsvariablen X und Y in tabellarischer Form an

b) Welcher Reingewinn ist im Durchschnitt bei Spiel 1 bzw. Spiel 2 zu erwarten?

c) Welches Spiel sollte ein risikofreudiger Spieler und welches ein risikoscheuer Spieler spielen? (Begründung mit Hilfe der Varianz bzw. Standardabweichung).

Lösung:

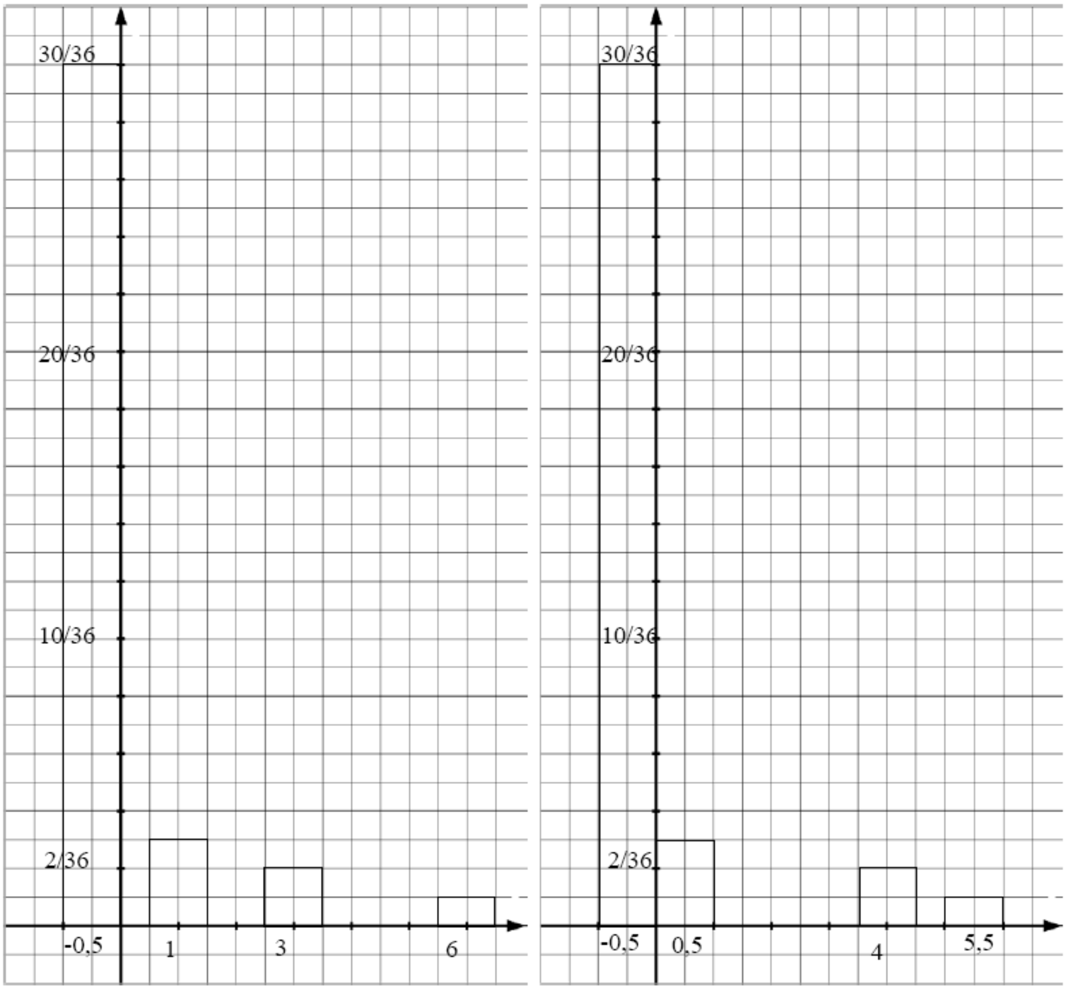
e_k	(1,1)	(1,2) (2,1)	(2,2) (1,3) (3,1)	(2,3) (3,2) (1,4) (4,1)	(3,3) (1,5) (5,1) (2,4) (4,2)	(1,6) (6,1) (2,5) (5,2) (3,4) (4,3)	(2,6) (6,2) (3,5) (5,3) (4,4)	(3,6) (6,3) (4,5) (5,4)	(4,6) (6,4) (5,5)	(5,6) (6,5)	(6,6)
Augen-summe	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Spiel 1

x_i	-0,5	1	3	6
$P(X=x_i)$	30/36	3/36	2/36	1/36

Spiel 2

y_i	-0,5	0,5	4	5,5
$P(Y=y_i)$	30/36	3/36	2/36	1/36



E(X) = 0	V(X) = 1 19/27	σ(X) ≈ 1,34
E(Y) = 0	V(Y) = 1 23/24	σ(X) ≈ 1,40

Aufgabe 261:

Ein Laplace - Würfel wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal die Sechs erscheint, höchstens aber 3mal. X bezeichne die Anzahl der Würfe.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable X in tabellarischer Form an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X und interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Berechnen Sie die Standardabweichung von X.

Lösung:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/6	5/6 * 1/6 = 5/36	$(5/6)^2$ * 1/6 + $(5/6)^3$ = 150/216

$E(X) \approx 2{,}53$

$V(X) = 0{,}58$

$\sigma(X) \approx 0{,}76$

Aufgabe 262:

Eine Münze wird so lange geworfen, bis "Zahl" oder insgesamt dreimal "Wappen" erscheint. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der ausgeführten Würfe bis zum Eintritt dieses Ereignisses.

a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable X

b) Wie viel Würfe werden im Mittel bis zum Eintreten des Ereignisses benötigt?

Lösung:

O 1/2 Z

$\Rightarrow$ 1/2 W 1/2 Z

$\Rightarrow$ 1/2 W 1/2 Z

$\Rightarrow$ 1/2 W

x	1	2	3
f(x)	1/2	1/4	(1/8)+(1/8)

$$\underline{\underline{\mu = E(x)}} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}75 = \underline{\underline{1{,}75}}$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 263:

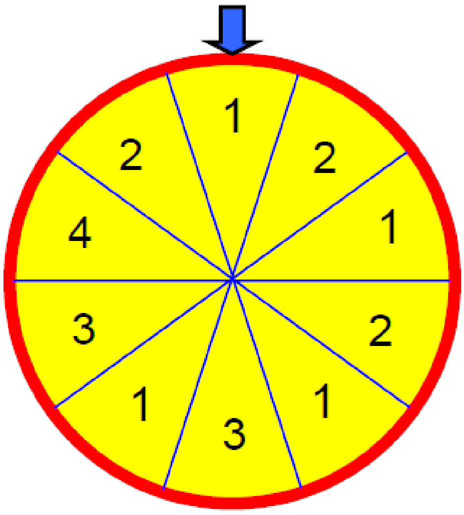
Ein Glücksrad enthält 10 gleichwahrscheinliche Sektoren, auf denen 4 Einser, 3 Zweier, 2 Dreier und 1 Vier stehen.

Bei einem Einsatz von 50 Cent wird das Rad dreimal gedreht.

Für jede drei die sich ergibt wird jeweils 1€ ausbezahlt und für jede 4 wird jeweils 2€ ausbezahlt. Für die restlichen Zahlen wird nichts ausbezahlt.

Berechnen Sie die Gewinnerwartung des Spielers.

Lösung:



Zahl z	1	2	3	4
P(z)	0,4	0,3	0,2	0,1

Einsatz: 0,5 €, Es wird 3 mal gedreht.

Gewinnplan:
Für n = 1 oder 2 gilt P(n)=0,7
A sei die Auszahlung

Ereignis	A	$P(X = x_i)$
{3;n;n}	1	$3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}294$
{3;3;n}	2	$3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}084$
{3;3;3}	3	$0{,}2^3 = 0{,}008$
{4;n;n}	2	$3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}147$
{4;4;n}	4	$3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}7 = 0{,}021$
{4;4;4}	6	$0{,}1^3 = 0{,}001$
{3;4;n}	3	$3! \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}084$
{3;4;4}	5	$3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}006$
{3;3;4}	4	$3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}012$
{n;n;n}	0	$0{,}7^3 = 0{,}343$

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten ist einfach. Im 1. Fall gibt es 3 Tripel , die 3 kann auf Platz 1, 2 oder 3 liegen, also haben wir 3 gleichwahrscheinliche Tripel !
Im 2. Fall kann n auf 3 Plätzen liegen.
Am „schwierigsten" ist der 7. Fall. Hier enthält das Tripel 3 verschiedene Zahlen, und die lassen sich bekanntlich auf 3 ! = 6 Arten anordnen (3 ! liest man 3 Fakultät). Dies lernt man in der Kombinatorik.

Für die Berechnung des Erwartungswerts wandle ich die Wahrscheinlichkeiten in Brüche mit dem Nenner 1000 um und klammere diesen Nenner aus. Damit läßt sich die Berechnung einfacher darstellen:

Erwartungswert der Auszahlung A:

$$E(A) = \frac{1}{1000} \cdot (1 \cdot 294 + 2 \cdot 84 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 147 + 4 \cdot 21 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 84 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 12) = \frac{1200}{1000} = 1{,}20$$

Man kann somit mit einer Auszahlung von 1,20 € rechnen, was einem Reingewinn von 70 Cent entspricht.

Aufgabe 264:

Ralf und Uli spielen dreimal das Knobelspiel „Schere, Stein und Papier“. Papier wickelt den Stein ein, der Stein zerstört die Schere und die Schere schneidet das Papier.

Für jedes gewonnene Spiel bekommt Ralf 1,00 €, verliert er, muss er 1,00 € bezahlen, bei Unentschieden wird kein Geld ausgezahlt. Die Zufallsvariable X beschreibt den Gewinn von Ralf.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariable X in tabellarischer Form an.

b) Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn von Ralf. Ist das Spiel fair?

c) Berechnen Sie die Standardabweichung von X.

Lösung:

e_k	$\overline{G}\,\overline{G}\,\overline{G}$	$U\,\overline{G}\,\overline{G}$ $\overline{G}\,U\,\overline{G}$ $\overline{G}\,\overline{G}\,U$	$G\,\overline{G}\,\overline{G}$ $\overline{G}\,G\,\overline{G}$ $\overline{G}\,\overline{G}\,G$ $\overline{G}\,U\,U$ $U\,U\,\overline{G}$ $U\,\overline{G}\,U$	$U\,U\,U$ $G\,U\,\overline{G}$ $G\,\overline{G}\,U$ $\overline{G}\,U\,G$ $\overline{G}\,G\,U$ $U\,\overline{G}\,G$ $U\,G\,\overline{G}$	$G\,G\,\overline{G}$ $\overline{G}\,G\,G$ $G\,\overline{G}\,G$ $U\,U\,G$ $G\,U\,U$ $U\,G\,U$	$G\,G\,U$ $G\,U\,G$ $U\,G\,G$	$G\,G\,G$
x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	1/27	3/27	6/27	7/27	6/27	3/27	1/27

G – Ralf gewinnt das Spiel.

$\overline{G}$ – Ralf gewinnt das Spiel nicht.

U – Das Spiel fällt unentschieden aus.

$\boxed{E(X) = 0}$

$\boxed{V(X) = 2}$

$\boxed{\sigma(X) \approx 1{,}41}$

Aufgabe 265:

Andreas und Michael trainieren Basketball. Michael trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3 den Korb.

Andreas bietet Michael zwei Spiele an:

Michael darf dreimal werfen.

Spiel 1: Andreas zahlt ihm für jeden Treffer 2 €. Falls er nicht trifft, muss Michael Andreas einen bestimmten Betrag x bezahlen. Die Zufallsvariable X definiert Michaels Gewinn.

Spiel 2: Andreas zahlt ihm für einen Treffer 1 €, für 2 Treffer 3 € und für 3 Treffer 4 €. Falls er nicht trifft, muss Michael wiederum Andreas einen bestimmten Betrag y bezahlen.

Die Zufallsvariable Y definiert Michaels Gewinn.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Zufallsvariablen X und Y in tabellarischer Form an. b) Für welche Beträge x bzw. y sind die Spiele fair?

c) Welches faire Spiel sollte Michael spielen, falls er risikofreudig ist, d.h. er einen hohen Gewinn erzielen möchte (Begründung mit Hilfe der Varianz bzw. Standardabweichung).

Lösung:

Spiel 1

e_k	$\bar{s}_1\ \bar{s}_2\ \bar{s}_3$	$s_1\ \bar{s}_2\ \bar{s}_3$ $\bar{s}_1\ s_2\ \bar{s}_3$ $\bar{s}_1\ \bar{s}_2\ s_3$	$\bar{s}_1\ s_2\ s_3$ $s_1\ \bar{s}_2\ s_3$ $s_1\ s_2\ \bar{s}_3$	$s_1\ s_2\ s_3$
x_i	- x	2	4	6
$P(X=x_i)$	$(2/3)^3 = 8/27$	$3 * (2/3)^2 * 1/3 = 4/9$	$3 * 2/3 * (1/3)^2 = 2/9$	$(1/3)^3 = 1/27$

S_i – Michael trifft im i-ten Spiel.

$\bar{S}_i$ – Michael trifft im i-ten Spiel nicht.

$E(X) = 0$	$x = 6,75$	$V(X) \approx 20,17$	$\sigma(X) \approx 4,49$

Spiel 2

e_k	$\bar{s}_1\ \bar{s}_2\ \bar{s}_3$	$s_1\ \bar{s}_2\ \bar{s}_3$ $\bar{s}_1\ s_2\ \bar{s}_3$ $\bar{s}_1\ \bar{s}_2\ s_3$	$\bar{s}_1\ s_2\ s_3$ $s_1\ \bar{s}_2\ s_3$ $s_1\ s_2\ \bar{s}_3$	$s_1\ s_2\ s_3$
y_i	- y	1	3	4
$P(Y=y_i)$	$(2/3)^3 = 8/27$	$3 * (2/3)^2 * 1/3 =$ 4/9	$3 * 2/3 * (1/3)^2 =$ 2/9	$(1/3)^3 = 1/27$

S_i – Michael trifft im i-ten Spiel.

$\bar{S}_i$ – Michael trifft im i-ten Spiel nicht.

$E(Y) = 0$	$y = 4{,}25$	$V(Y) = 8\ 7/18$	$\sigma(Y) \approx 2{,}896$

Indexberechnungen

Aufgabe 266:

Ein Unternehmen erzielte für seine Produkte i=1, 2, 3 in den Jahren 1995 (t=0) und 2000 (t=1) folgende Preise und Absatzmengen:

Produkt i	1995		2000	
	Preis p_i	Menge m_i	Preis p_i	Menge m_i
1	3	3.000	2	1.000
2	5	2.000	6	4.000
3	2	5.000	2	5.000

Man berechne den Umsatzindex sowie die Preis- und Mengenindizes nach Laspeyres und Paasche für die Berichtsperiode 2000 und die Basisperiode 1995.

Lösung:

Umsatzindex:

$$U_{1995,2000} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{2000} \cdot m^{i}_{2000}}{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{1995} \cdot m^{i}_{1995}} = \frac{2 \cdot 1.000 + 6 \cdot 4.000 + 2 \cdot 5.000}{3 \cdot 3.000 + 5 \cdot 2.000 + 2 \cdot 5.000} = \frac{36.000}{29.000} = 1{,}241$$

$$P^{L}_{1995,2000} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{2000} \cdot m^{i}_{1995}}{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{1995} \cdot m^{i}_{1995}} = \frac{2 \cdot 3.000 + 6 \cdot 2.000 + 2 \cdot 5.000}{3 \cdot 3.000 + 5 \cdot 2000 + 2 \cdot 5.000} = \frac{28.000}{29.000} = 0{,}966$$

$$P^{P}_{1995,2000} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{2000} \cdot m^{i}_{2000}}{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{1995} \cdot m^{i}_{2000}} = \frac{2 \cdot 1.000 + 6 \cdot 4.000 + 2 \cdot 5.000}{3 \cdot 1.000 + 5 \cdot 4.000 + 2 \cdot 5.000} = \frac{36.000}{33.000} = 1{,}091$$

$$M^{L}_{1995,2000} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{1995} \cdot m^{i}_{2000}}{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{1995} \cdot m^{i}_{1995}} = \frac{3 \cdot 1.000 + 5 \cdot 4.000 + 2 \cdot 5.000}{3 \cdot 3.000 + 5 \cdot 2000 + 2 \cdot 5.000} = \frac{33.000}{29.000} = 1{,}138$$

$$M^{P}_{1995,2000} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{2000} \cdot m^{i}_{2000}}{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{2000} \cdot m^{i}_{2000}} = \frac{2 \cdot 1.000 + 6 \cdot 4.000 + 2 \cdot 5.000}{2 \cdot 3.000 + 6 \cdot 2.000 + 2 \cdot 5.000} = \frac{36.000}{28.000} = 1{,}286$$

Aufgabe 267:

Für die Spareinlagen der Bürger in einer bestimmten Region zum jeweiligen Jahresende liegen folgende Indexwerte vor:

Jahr	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
	1,000	0,983	1,044	1,125	1,165	1,280	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	1,000	1,072	1,130	1,163	1,126

Verketten Sie diese beiden Reihen so, dass sich eine Index - Reihe von 1980 bis 1989 mit dem Basisjahr 1985 ergibt.

Lösung:

Für die Jahre 1980 bis 1984 ergeben sich die Indizes zum Basisjahr 1985 :

1,28 1,372 1,446 1,489 1,441

0,781 0,768 0,816 0,879 0,910 1,00

$$P_{80\,neu} = \frac{P_{80\,alt}}{P_{85\,alt}} = \frac{1,000}{1,280} = 0,7813$$

$$P_{81\,neu} = \frac{P_{81\,alt}}{P_{85\,alt}} = \frac{0,983}{1,280} = 0,7680$$

$$P_{82\,neu} = \frac{P_{82\,alt}}{P_{85\,alt}} = \frac{1,044}{1,280} = 0,8156$$

$$P_{83\,neu} = \frac{P_{83\,alt}}{P_{85\,alt}} = \frac{1,125}{1,280} = 0,8789$$

$$P_{84\,neu} = \frac{P_{84\,alt}}{P_{85\,alt}} = \frac{1,165}{1,280} = 0,9102$$

$$P_{86\,alt} = \frac{P_{85\,alt}}{P_{85\,neu}} \cdot P_{86\,neu} = \frac{1,280}{1,000} \cdot 1,072 = 1,3722$$

$$P_{87\,alt} = \frac{P_{85\,alt}}{P_{85\,neu}} \cdot P_{87\,neu} = \frac{1,280}{1,000} \cdot 1,130 = 1,446$$

$$P_{88\,alt} = \frac{P_{85\,alt}}{P_{85\,neu}} \cdot P_{88\,neu} = \frac{1,280}{1,000} \cdot 1,163 = 1,4886$$

$$P_{89\,alt} = \frac{P_{85\,alt}}{P_{85\,neu}} \cdot P_{89\,neu} = \frac{1,280}{1,000} \cdot 1,126 = 1,4413$$

Aufgabe 268:

Aus Veröffentlichungen des Statistischen Bundesamtes ist der Preisindex für die Lebenshaltung in der Bedarfsgruppe Haushaltführung wie folgt ausgewiesen:

1985	1986	1987	1988	1989	1990

100,0	101,1	102,2	103,3	104,9	107,3

Basieren Sie diesen Index vom Jahr 1985 auf das Jahr 1990 um.

Lösung:

$$P_{90,85}=\frac{P_{85}}{P_{90}}=\frac{100}{107{,}3}\cdot 100\%=93{,}20\%$$

$$P_{90,86}=\frac{P_{86}}{P_{90}}=\frac{101{,}1}{107{,}3}\cdot 100\%=94{,}22\%$$

$$P_{90,87}=\frac{P_{87}}{P_{90}}=\frac{102{,}2}{107{,}3}\cdot 100\%=95{,}25\%$$

$$P_{90,88}=\frac{P_{88}}{P_{90}}=\frac{103{,}3}{107{,}3}\cdot 100\%=96{,}27\%$$

$$P_{90,89}=\frac{P_{89}}{P_{90}}=\frac{104{,}9}{107{,}3}\cdot 100\%=97{,}76\%$$

1985	1986	1987	1988	1989	1990
93,20	94,22	95,25	96,27	97,76	100,0

Aufgabe 269:

Die Preise p und die Mengen m für einen Warenkorb aus vier Gütern sind für die Jahre 2002 und 2003 in der unteren Tabelle angegeben:

	Gut 1		Gut 2		Gut 3		Gut 4	
	P	M	P	M	P	M	P	M
2002	6	40	55	11	7	140	1,6	405
2003	7,3	56	59	12,8	6	180	1,8	415

1.

2. a) Bestimmen Sie für 2003 zur Basis 2002 den Preisindex nach Laspeyres und Paasche.

3. b) Bestimmen Sie dazu auch den Mengenindex nach Laspeyres und Paasche, sowie den Umsatzindex.

Lösung:

a)

$$P^L_{2002,2003} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^i_{2003} \cdot m^i_{2002}}{\sum_{i=1}^{n} p^i_{2002} \cdot m^i_{2002}} = \frac{7{,}3 \cdot 40 + 59 \cdot 11 + 6 \cdot 140 + 1{,}8 \cdot 405}{6 \cdot 40 + 55 \cdot 11 + 7 \cdot 140 + 1{,}6 \cdot 405} = \frac{2.510}{2.473} = 1{,}01496$$

$$P^P_{2002,2003} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^i_{2003} \cdot m^i_{2003}}{\sum_{i=1}^{n} p^i_{2002} \cdot m^i_{2003}} = \frac{7{,}3 \cdot 56 + 59 \cdot 12{,}8 + 6 \cdot 180 + 1{,}8 \cdot 415}{6 \cdot 56 + 55 \cdot 12{,}8 + 7 \cdot 180 + 1{,}6 \cdot 405} = \frac{2.991}{2.948} = 1{,}01459$$

b)

$$M^L_{2002,2003} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^i_{2002} \cdot m^i_{2003}}{\sum_{i=1}^{n} p^i_{2002} \cdot m^i_{2002}} = \frac{6 \cdot 56 + 55 \cdot 12{,}8 + 7 \cdot 180 + 1{,}6 \cdot 415}{6 \cdot 40 + 55 \cdot 11 + 7 \cdot 140 + 1{,}6 \cdot 405} = \frac{2.964}{2.473} = 1{,}19854$$

$$M^P_{2002,2003} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^i_{2003} \cdot m^i_{2003}}{\sum_{i=1}^{n} p^i_{2003} \cdot m^i_{2002}} = \frac{7{,}3 \cdot 56 + 59 \cdot 12{,}8 + 6 \cdot 180 + 1{,}8 \cdot 415}{7{,}3 \cdot 40 + 59 \cdot 11 + 6 \cdot 140 + 1{,}8 \cdot 405} = \frac{2.991}{2.510} = 1{,}19163$$

$$U_{2002,2003} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^i_{2003} \cdot m^i_{2003}}{\sum_{i=1}^{n} p^i_{2002} \cdot m^i_{2002}} = \frac{7{,}3 \cdot 56 + 59 \cdot 12{,}8 + 6 \cdot 180 + 1{,}8 \cdot 415}{6 \cdot 40 + 55 \cdot 11 + 7 \cdot 140 + 1{,}6 \cdot 405} = \frac{2.991}{2.473} = 1{,}20946$$

Aufgabe 270:

Für den durchschnittlichen monatlichen Fleischwarenverbrauch eines repräsentativen Haushalts gibt das Statistische Bundesamt folgende Zahlen an:

Fleischwaren	1986		1988	
	kg	Euro/kg	kg	Euro/kg
Wurst, Wurstwaren	5,290	11,86	4,745	11,77
Schinken, Speck	1,032	15,91	1,049	15,90
Wurstkonserven	0,320	7,78	0,392	7,60

Berechnen Sie den Preisindex und den Mengenindex für das Berichtsjahr 1988 zum Basisjahr 1986 nach Paasche.

Lösung:

$$P^{P}_{1986,1988} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{1988} \cdot m^{i}_{1988}}{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{1986} \cdot m^{i}_{1988}} = \frac{4{,}745 \cdot 11{,}17 + 1{,}049 \cdot 15{,}90 + 0{,}392 \cdot 7{,}60}{4{,}745 \cdot 11{,}86 + 1{,}049 \cdot 15{,}91 + 0{,}392 \cdot 7{,}78} = \frac{75{,}507}{76{,}015} = 0{,}9933$$

Was 1988 gekauft wurde kostet 0,67 % weniger als 1986

$$M^{P}_{2002,2003} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{1988} \cdot m^{i}_{1988}}{\sum_{i=1}^{n} p^{i}_{1988} \cdot m^{i}_{1986}} = \frac{11{,}77 \cdot 4{,}745 + 15{,}90 \cdot 1{,}049 + 0{,}392 \cdot 180}{11{,}77 \cdot 5{,}290 + 15{,}90 \cdot 1{,}032 + 7{,}60 \cdot 0{,}320} = \frac{75{,}507}{81{,}104} = 0{,}9310$$

Für das, was man 1988 bezahlt, erhält man 6,9 % weniger Ware

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 271:

In der nachstehenden Tabelle sind für die Güter A, B und C die Preise und die Mengen für die Jahre 1,2 und 3 angegeben.

Gut	Jahr 1		Jahr 2		Jahr 3	
	Preis	Menge	Preis	Menge	Preis	Menge
A	6,00	22	7,00	21	7,50	23
B	27,50	4	26,00	6	28,00	5
C	14,00	7	14,50	9	15,00	10

Berechnen Sie den Preisindex nach Laspeyres und Paasche zum Basisjahr 1 und dem Berichtsjahr 2. Anschließend auch noch den Preisindex nach Fisher.

Lösung:

$$P_{1,2}^{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_2^i \cdot m_1^i}{\sum_{i=1}^{n} p_1^i \cdot m_1^i} = \frac{7{,}00 \cdot 22 + 26{,}00 \cdot 4 + 14{,}50 \cdot 7}{6{,}00 \cdot 22 + 27{,}50 \cdot 4 + 14 \cdot 7} = \frac{359{,}50}{340} = 1{,}0574$$

$$P_{1,2}^{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_2^i \cdot m_2^i}{\sum_{i=1}^{n} p_1^i \cdot m_2^i} = \frac{7{,}00 \cdot 21 + 26{,}00 \cdot 6 + 14{,}50 \cdot 9}{6{,}00 \cdot 21 + 27{,}50 \cdot 6 + 14 \cdot 9} = \frac{433{,}50}{417} = 1{,}0396$$

$$\mathrm{P}_{1,2}^{\mathrm{F}} = \sqrt{\mathrm{P}_{1,2}^{\mathrm{L}} \cdot \mathrm{P}_{1,2}^{\mathrm{P}}} = \sqrt{1{,}0574 \cdot 1{,}0396} = 1{,}0485$$

Aufgabe 272:

In der nachstehenden Tabelle sind für die Güter A, B und C die Preise und die Mengen für die Jahre 1,2 und 3 angegeben.

Gut	Jahr 1		Jahr 2		Jahr 3	
	Preis	Menge	Preis	Menge	Preis	Menge
A	6,00	22	7,00	21	7,50	23
B	27,50	4	26,00	6	28,00	5
C	14,00	7	14,50	9	15,00	10

Berechnen Sie den Preisindex nach Laspeyres und Paasche zum Basisjahr 1 und dem Berichtsjahr 3. Anschließend auch noch den Preisindex nach Fisher.

Lösung:

$$P_{1,3}^{L}=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_3^i \cdot m_1^i}{\sum_{i=1}^{n} p_1^i \cdot m_1^i}=\frac{7{,}50\cdot 22+28{,}00\cdot 4+15{,}00\cdot 7}{6{,}00\cdot 22+27{,}50\cdot 4+14\cdot 7}=\frac{382}{340}=1{,}1235$$

$$P_{1,3}^{P}=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_3^i \cdot m_3^i}{\sum_{i=1}^{n} p_1^i \cdot m_3^i}=\frac{7{,}5\cdot 23+28{,}00\cdot 5+15{,}00\cdot 10}{6{,}00\cdot 23+27{,}50\cdot 5+14\cdot 10}=\frac{462{,}5}{415{,}5}=1{,}1131$$

$$P_{1,3}^{F}=\sqrt{P_{1,3}^{L}\cdot P_{1,3}^{P}}=\sqrt{1{,}1235\cdot 1{,}1131}=1{,}1183$$

Aufgabe 273:

In der nachstehenden Tabelle sind für die Güter A, B und C die Preise und die Mengen für die Jahre 1,2 und 3 angegeben.

Gut	Jahr 1		Jahr 2		Jahr 3	
	Preis	Menge	Preis	Menge	Preis	Menge
A	6,00	22	7,00	21	7,50	23
B	27,50	4	26,00	6	28,00	5
C	14,00	7	14,50	9	15,00	10

Berechnen Sie den Preisindex nach Laspeyres und Paasche zum Basisjahr 2 und dem Berichtsjahr 3. Anschließend auch noch den Preisindex nach Fisher.

Lösung:

$$P_{2,3}^{L}=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_3^i \cdot m_2^i}{\sum_{i=1}^{n} p_2^i \cdot m_2^i}=\frac{7{,}50\cdot 21+28{,}00\cdot 6+15{,}00\cdot 9}{7{,}00\cdot 21+26{,}00\cdot 6+14{,}50\cdot 9}=\frac{460{,}50}{433{,}50}=1{,}0623$$

$$P_{1,3}^{P}=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_3^i \cdot m_3^i}{\sum_{i=1}^{n} p_2^i \cdot m_3^i}=\frac{7{,}50\cdot 23+28{,}00\cdot 5+15{,}00\cdot 10}{7{,}00\cdot 23+26{,}00\cdot 5+14{,}50\cdot 10}=\frac{462{,}5}{436}=1{,}0608$$

$$P_{2,3}^{F}=\sqrt{P_{2,3}^{L}\cdot P_{2,3}^{P}}=\sqrt{1{,}0623\cdot 1{,}0608}=1{,}0615$$

Aufgabe 274:

In der nachstehenden Tabelle sind für die Güter A, B und C die Preise und die Mengen für die Jahre 1,2 und 3 angegeben.

Gut	Jahr 1		Jahr 2		Jahr 3	
	Preis	Menge	Preis	Menge	Preis	Menge
A	6,00	22	7,00	21	7,50	23
B	27,50	4	26,00	6	28,00	5
C	14,00	7	14,50	9	15,00	10

Berechnen Sie den Mengenindex nach Laspeyres und Paasche zum Basisjahr 1 und dem Berichtsjahr 2.

Lösung:

$$M_{1,2}^{L}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_1^i\cdot m_2^i}{\sum_{i=1}^{n}p_1^i\cdot m_1^i}=\frac{6{,}00\cdot 21+27{,}50\cdot 6+14{,}00\cdot 9}{6{,}00\cdot 22+27{,}50\cdot 4+14\cdot 7}=\frac{417}{340}=1{,}2265$$

$$M_{1,2}^{P}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_2^i\cdot m_2^i}{\sum_{i=1}^{n}p_2^i\cdot m_1^i}=\frac{7{,}00\cdot 21+26{,}00\cdot 6+14{,}50\cdot 9}{7{,}00\cdot 22+26{,}00\cdot 4+14{,}50\cdot 7}=\frac{433{,}50}{359{,}5}=1{,}2058$$

Aufgabe 275:

In der nachstehenden Tabelle sind für die Güter A, B und C die Preise und die Mengen für die Jahre 1,2 und 3 angegeben.

Gut	Jahr 1		Jahr 2		Jahr 3	
	Preis	Menge	Preis	Menge	Preis	Menge
A	6,00	22	7,00	21	7,50	23
B	27,50	4	26,00	6	28,00	5
C	14,00	7	14,50	9	15,00	10

Berechnen Sie den Mengenindex nach Laspeyres und Paasche zum Basisjahr 1 und dem Berichtsjahr 3.

Lösung:

$$M_{1,3}^{L}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_1^i\cdot m_3^i}{\sum_{i=1}^{n}p_1^i\cdot m_1^i}=\frac{6{,}00\cdot 23+27{,}50\cdot 5+14{,}00\cdot 10}{6{,}00\cdot 22+27{,}50\cdot 4+14\cdot 7}=\frac{415{,}50}{340}=1{,}2220$$

$$M_{1,3}^{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_3^i \cdot m_3^i}{\sum_{i=1}^{n} p_3^i \cdot m_1^i} = \frac{7{,}50 \cdot 23 + 28{,}00 \cdot 5 + 15{,}00 \cdot 10}{7{,}50 \cdot 22 + 28{,}00 \cdot 4 + 15{,}00 \cdot 7} = \frac{462{,}5}{382} = 1{,}2107$$

Aufgabe 276:

In der nachstehenden Tabelle sind für die Güter A, B und C die Preise und die Mengen für die Jahre 1,2 und 3 angegeben.

Gut	Jahr 1		Jahr 2		Jahr 3	
	Preis	Menge	Preis	Menge	Preis	Menge
A	6,00	22	7,00	21	7,50	23
B	27,50	4	26,00	6	28,00	5
C	14,00	7	14,50	9	15,00	10

Berechnen Sie den Mengenindex nach Laspeyres und Paasche zum Basisjahr 2 und dem Berichtsjahr 3.

Lösung:

$$M_{2,3}^{L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_2^i \cdot m_3^i}{\sum_{i=1}^{n} p_2^i \cdot m_2^i} = \frac{7{,}00 \cdot 23 + 26{,}00 \cdot 5 + 14{,}50 \cdot 10}{7{,}00 \cdot 21 + 26{,}00 \cdot 6 + 14{,}50 \cdot 9} = \frac{436}{433{,}5} = 1{,}0058$$

$$M_{2,3}^{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_3^i \cdot m_3^i}{\sum_{i=1}^{n} p_3^i \cdot m_2^i} = \frac{7{,}50 \cdot 23 + 28{,}00 \cdot 5 + 15{,}00 \cdot 10}{7{,}50 \cdot 21 + 28{,}00 \cdot 6 + 15{,}00 \cdot 9} = \frac{462{,}50}{460{,}50} = 1{,}0043$$

Aufgabe 277:

In der nachstehenden Tabelle sind für die Güter A, B und C die Preise und die Mengen für die Jahre 1,2 und 3 angegeben.

Gut	Jahr 1		Jahr 2		Jahr 3	
	Preis	Menge	Preis	Menge	Preis	Menge
A	6,00	22	7,00	21	7,50	23
B	27,50	4	26,00	6	28,00	5
C	14,00	7	14,50	9	15,00	10

Berechnen Sie den Umsatzindex zum Basisjahr 1 und dem Berichtsjahr 2.

Lösung:

$$U_{1,2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_2^i \cdot m_2^i}{\sum_{i=1}^{n} p_1^i \cdot m_1^i} = \frac{7{,}00 \cdot 21 + 26{,}00 \cdot 6 + 14{,}50 \cdot 9}{6{,}00 \cdot 22 + 27{,}50 \cdot 4 + 14 \cdot 7} = \frac{433{,}50}{340} = 1{,}2750$$

Aufgabe 278:

In der nachstehenden Tabelle sind für die Güter A, B und C die Preise und die Mengen für die Jahre 1,2 und 3 angegeben.

Gut	Jahr 1		Jahr 2		Jahr 3	
	Preis	Menge	Preis	Menge	Preis	Menge
A	6,00	22	7,00	21	7,50	23
B	27,50	4	26,00	6	28,00	5
C	14,00	7	14,50	9	15,00	10

Berechnen Sie den Umsatzindex zum Basisjahr 1 und dem Berichtsjahr 3.

Lösung:

$$U_{1,3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_3^i \cdot m_3^i}{\sum_{i=1}^{n} p_1^i \cdot m_1^i} = \frac{7{,}50 \cdot 23 + 28{,}00 \cdot 5 + 15{,}00 \cdot 10}{6{,}00 \cdot 22 + 27{,}50 \cdot 4 + 14 \cdot 7} = \frac{462{,}5}{340} = 1{,}3603$$

Aufgabe 279:

In der nachstehenden Tabelle sind für die Güter A, B und C die Preise und die Mengen für die Jahre 1,2 und 3 angegeben.

Gut	Jahr 1		Jahr 2		Jahr 3	
	Preis	Menge	Preis	Menge	Preis	Menge

A	6,00	22	7,00	21	7,50	23
B	27,50	4	26,00	6	28,00	5
C	14,00	7	14,50	9	15,00	10

Berechnen Sie den Umsatzindex zum Basisjahr 2 und dem Berichtsjahr 3.

Lösung:

$$U_{2,3} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_3^i \cdot m_3^i}{\sum_{i=1}^{n} p_2^i \cdot m_2^i} = \frac{7{,}50 \cdot 23 + 28{,}00 \cdot 5 + 15{,}00 \cdot 10}{7{,}00 \cdot 21 + 26{,}00 \cdot 6 + 14{,}50 \cdot 9} = \frac{462{,}50}{433{,}50} = 1{,}0669$$

Aufgabe 280:

In nachstehender Tabelle ist der Verbraucherpreisindex (Preisindex für die Lebenshaltung) für Deutschland (1995 = 100) und für Sikinien (1993 = 100) angegeben.

Jahr	1995	1996	…	2005	2006	2007	2008
Deutschland	100,0	101,3	…	115,8	117,7	120,4	123,4
Sikinien	102,6	103,4	…	111,0	112,2	113,0	115,0

Vergleichen Sie die Preisentwicklung der beiden Länder für den angegebenen Zeitraum.

Lösung:

Es muss hier eine Umbasierung erfolgen. Wir setzen für Sikinien 1995 =100). Bei einem gleichen Basiswert, können die restlichen Zahlen einfach verglichen werden.

Preisindex für Berichtsjahr 1996 zum Basisjahr 1995:

$$P_{95,96} = \frac{P_{96}}{P_{95}} \cdot 100 = \frac{103{,}4}{102{,}6} \cdot 100 = 100{,}8$$

Allgemein:

$$P_{95,96} = \frac{P_{93,i}}{P_{95}} \cdot 100 = \frac{P_{93,i}}{102{,}6} \cdot 100$$

Preisindex für Berichtsjahr 1997 zum Basisjahr 1995:

$$05 = \frac{P_{05}}{P_{95}} \cdot 100 = \frac{111{,}0}{102{,}6} \cdot 100 = 108{,}2$$

Preisindex für Berichtsjahr 2000 zum Basisjahr 1995:

$$P_{95,06} = \frac{P_{06}}{P_{95}} \cdot 100 = \frac{112{,}2}{102{,}6} = 109{,}4$$

Preisindex für Berichtsjahr 2001 zum Basisjahr 1995:

$$P_{95,07} = \frac{P_{07}}{P_{95}} \cdot 100 = \frac{113{,}0}{102{,}6} = 110{,}1$$

Preisindex für Berichtsjahr 2002 zum Basisjahr 1995:

$$P_{95,08} = \frac{P_{08}}{P_{95}} \cdot 100 = \frac{115{,}0}{102{,}6} = 112{,}1$$

Jahr	1995	1996	…	2005	2006	2007	2008
Deutschland	100,0	101,3	…	115,8	117,7	120,4	123,4
Sikinien	100,0	100,8	…	108,2	109,4	110,1	112,1

Aufgabe 281:

In nachstehender Tabelle ist der Verbraucherpreisindex (Preisindex für die Lebenshaltung) für die Bundesrepublik Deutschland für den Zeitraum 1995 bis 2002.Da diese Indexzahlen nach Laspeyres ermittelt werden, muss der Warenkorb in bestimmten Abständen aktualisiert werden. Dies ist zuletzt im Jahr 1995 geschehen. Dadurch kam es zu einer Unterbrechung der Indexzahlenreihe im Jahr der Aktualisierung. Stellen Sie eine Verknüpfung der beiden Reihen durch eine Vorwärts- bzw. Rückwärtsrechnung her.

Jahr	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
P_{95}, i	100,0	101,3	103,2	104,1	104,8	106,9		
$P_{2000,i}$						100,0	102,0	103,4

Lösung:

Jahr	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
P_{95}, i	100,0	101,3	103,2	104,1	104,8	106,9		
$P_{2000,i}$						100,0	102,0	103,4

Fortführung der alten Indexreihe auf Basis 1995:

$$\mathrm{P}_{95,01} = \mathrm{P}_{00,01} \cdot \frac{\mathrm{P}_{95,00}}{100} = 102{,}0 \cdot \frac{106{,}9}{100} = 109{,}0$$

$$\mathrm{P}_{95,02} = \mathrm{P}_{00,02} \cdot \frac{\mathrm{P}_{95,00}}{100} = 103{,}4 \cdot \frac{106{,}9}{100} = 110{,}5$$

Rückrechnung der neuen Indexreihe auf Basis 2000:

$$\mathrm{P}_{00,99} = \mathrm{P}_{95,99} \cdot \frac{100}{\mathrm{P}_{95,00}} = 104{,}8 \cdot \frac{100}{106{,}9} = 98{,}0$$

$$\mathrm{P}_{00,98} = \mathrm{P}_{95,98} \cdot \frac{100}{\mathrm{P}_{95,00}} = 104{,}1 \cdot \frac{100}{106{,}9} = 97{,}4$$

$$\mathrm{P}_{00,97} = \mathrm{P}_{95,97} \cdot \frac{100}{\mathrm{P}_{95,00}} = 103{,}2 \cdot \frac{100}{106{,}9} = 96{,}5$$

$$\mathrm{P}_{00,96} = \mathrm{P}_{95,96} \cdot \frac{100}{\mathrm{P}_{95,00}} = 101{,}3 \cdot \frac{100}{106{,}9} = 94{,}8$$

$$\mathrm{P}_{00,95} = \mathrm{P}_{95,95} \cdot \frac{100}{\mathrm{P}_{95,00}} = 100 \cdot \frac{100}{106{,}9} = 93{,}5$$

Aufgabe 282:

In der nachstehenden Tabelle finden Sie auszugsweise für den Zeitraum 1993 bis 2002 die Umsatzentwicklung (in Tsd.€) eines Strickmaschinenherstellers sowie den entsprechenden Preisindex für seine Maschine Modell Strickliesel.

Jahr	1993	1994	1995	1996	…	2002
Umsatz (Mio Euro)	2.200	2.400	2.500	2.800	…	3.840
$P_{1991,i}$	105,8	106,5	108,1		…	
P_{1995},i			100,0	102,6	…	110,5

Führen Sie eine Preisbereinigung (Deflationierung) durch. Führen Sie dafür den alten Index weiter (1991=100) und rechnen sie den neuen Index zurück (1995=100).

Lösung:

Fortführung des alten Index:

$$P_{91,02} = P_{95,02} \cdot \frac{P_{91,95}}{100} = 110{,}5 \cdot \frac{108{,}1}{100} = 119{,}5$$

$$P_{91,96} = P_{95,96} \cdot \frac{P_{91,95}}{100} = 102{,}6 \cdot \frac{108{,}1}{100} = 110{,}9$$

Rückführung des neuen Index:

$$P_{95,94} = P_{91,94} \cdot \frac{100}{P_{91,95}} = 106{,}5 \cdot \frac{100}{108{,}1} = 98{,}5$$

$$P_{95,93} = P_{91,93} \cdot \frac{100}{P_{91,95}} = 105{,}8 \cdot \frac{100}{108{,}1} = 97{,}9$$

Aufgabe 283:

Für das Warensortiment einer Firma werden laufend Preis-, Mengen- und Umsatzindizes berechnet. Welche der folgenden Aussagen ist richtig, falls für jede Ware des Sortimentes die umgesetzte Menge in der Basisperiode mit der umgesetzten Menge in der Berichtsperiode übereinstimmt?

A: Preisindex nach LASPEYRES = Preisindex nach PAASCHE

B: Preisindex nach LASPEYRES = Umsatzindex

C: Preisindex nach PAASCHE = Umsatzindex

D: Mengenindex nach PAASCHE = Mengenindex nach LASPEYRES

E: Mengenindex nach PAASCHE = Preisindex nach LASPEYRES

F: Mengenindex nach LASPEYRES = 1

G: Mengenindex nach LASPEYRES = Umsatzindex

Lösung:

Sei N die Zahl der Waren. Es gilt nach Voraussetzung $q_{ti} = q_{0i}$ für alle $i = 1, 2, \dots N$, nach Definition (W bezeichne den Umsatzindex)

$$
\begin{aligned}
{}_LP_{0t} &= \frac{\sum q_{0i}p_{ti}}{\sum q_{0i}p_{0i}}, \quad {}_PP_{0t} = \frac{\sum q_{ti}p_{ti}}{\sum q_{ti}p_{0i}}, \\
{}_LQ_{0t} &= \frac{\sum p_{0i}q_{ti}}{\sum p_{0i}q_{0i}}, \quad {}_PQ_{0t} = \frac{\sum p_{ti}q_{ti}}{\sum p_{ti}q_{0i}}, \quad W = \frac{\sum q_{ti}p_{ti}}{\sum q_{0i}p_{0i}},
\end{aligned}
$$

und daher ${}_LP_{0t} = {}_PP_{0t} = W$ und ${}_PQ_{0t} = {}_LQ_{0t} = 1$, also sind die Aussagen A, B, C, D, F richtig und die Aussagen E und G falsch. □

Aufgabe 284:

Der Index der Verbraucherpreise, wie er in der folgenden Tabelle wiedergegeben wird, soll von der alten Indexbasis 1985 (d.h. 1985 = 100) auf eine neue Basis 1987 (d.h. 1987 = 100) umgestellt werden. Führen Sie diese Umbasierung für alle Indexzahlen durch.

Jahr t	Index $I_{85,t}$(Basis 1985) in %
1985	100,0
1986	97,5
1987	95,1
1988	96,3
1989	99,3
1990	101,0
1991	103,4
1992	104,8

Lösung:

Berechnung:

$$1985: \frac{100}{95,1} \cdot 100,0 = 105,2$$

$$1986: \frac{100}{95,1} \cdot 97,5 = 102,5$$

$$1987: \frac{100}{95,1} \cdot 95,1 = 100,0$$

$$1988: \frac{100}{95,1} \cdot 96,3 = 101,3$$

$$1989: \frac{100}{95,1} \cdot 99,3 = 104,4$$

$$1990: \frac{100}{95,1} \cdot 101,0 = 106,2$$

$$1991: \frac{100}{95,1} \cdot 103,4 = 108,7$$

$$1992: \frac{100}{95,1} \cdot 104,8 = 110,2$$

Jahr	Index $I_{87,t}$(Basis 1987) in %
1985	105,2
1986	102,5
1987	100,0
1988	101,3
1989	104,4
1990	106,2
1991	108,7
1992	110,2

Aufgabe 285:

In der folgenden Tabelle ist ein Warenkorb eines 4-Personen-Haushalts und Preise der Güter 1980 bis 1982 dargestellt.

Ware i	Einheit	Preis in DM/Einheit			Menge q_i		
		1980	**1981**	**1982**	**1980**	**1981**	**1982**
Brot	**kg**	1,90	2,00	2,20	690	660	620
Butter	**kg**	4,30	4,50	4,60	25	28	30
Milch	**l**	0,72	0,76	0,80	420	400	390
Rind-fleisch	**kg**	5,80	6,50	7,00	81	90	100
Eier	**Dz**	1,90	2,10	2,40	50	45	50
Salz	**kg**	0,48	0,48	0,48	9	10	10
Zucker	**kg**	1,191	1,28	1,48	42	52	55

Berechnen Sie den Preisindex nach Paasche für das Basisjahr 1981 und das Berichtsjahr 1982 sowie den Umsatzindex für das Basisjahr 1980 und das Berichtsjahr 1982.

Lösung:

$$P_{0,t}^{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \cdot m_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \cdot m_t^i}$$

$$= \frac{2{,}2\cdot 620 + 4{,}6 * 30 + 0{,}8 * 390 + 7 * 100 + 2{,}4 * 50 + 0{,}48\cdot 10 + 1{,}48\cdot 55}{2{,}0 * 620 + 4{,}5 * 30 + 0{,}76 * 390 + 6{,}5 * 100 + 2{,}1 * 50 + 0{,}48\cdot 10 + 1{,}28\cdot 55} = \frac{2.720{,}2}{2.501{,}6} = 1{,}0874$$

$$U_{0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_t^i \cdot m_t^i}{\sum_{i=1}^{n} p_0^i \cdot m_0^i}$$

$$= \frac{2{,}2 \cdot 620 + 4{,}6 * 30 + 0{,}8 * 390 + 7 * 100 + 2{,}4 * 50 + 0{,}48 \cdot 10 + 1{,}48 \cdot 55}{1{,}9 * 690 + 4{,}3 * 25 + 0{,}72 * 420 + 5{,}8 * 81 + 1{,}9 * 50 + 0{,}48 \cdot 9 + 1{,}191 \cdot 42} = \frac{2.720}{2.340{,}042} = 1{,}1624$$

Aufgabe 286:

Für eine Person haben sich die Preise und der Verbrauch einiger Konsumgüter wie unten angegeben entwickelt.

	1995		2000	
	Preis	Verbrauch	Preis	Verbrauch
Zigaretten	4,00	10	5,00	7
Pizza	5,00	4	6,00	3
Kino	8,00	2	12,00	1
Bier	0,60	10	1,00	8

Bestimmen Sie den Preisindex nach Paasche und Laspeyres.

Lösung:

Bestimmung des Preisindex nach Laspeyres:

$$P^L_{1995,2000} = \frac{\sum_{i=1}^4 p_{i2000}q_{i1995}}{\sum_{i=1}^4 p_{i1995}q_{i1995}}$$

$$= \frac{5\cdot 10+6\cdot 4+12\cdot 2+1\cdot 10}{4\cdot 10+5\cdot 4+8\cdot 2+0,6\cdot 10}$$

$$= \frac{54}{41}$$

$$\approx 1,32$$

Bestimmung des Preisindex nach Pasche:

$$P^P_{1995,2000} = \frac{\sum_{i=1}^4 p_{i2000}q_{i2000}}{\sum_{i=1}^4 p_{i1995}q_{i2000}}$$

$$= \frac{5\cdot 7+6\cdot 3+12\cdot 1+1\cdot 8}{4\cdot 7+5\cdot 3+8\cdot 1+0,6\cdot 8}$$

=1,31

Aufgabe 287:

Familie Riesig leistet sich folgende Produkte und Ausgaben. Für die einzelnen Jahre wurde aus dem Haushaltsbuch folgende Übersicht erstellt. Beachten Sie dabei die Angaben in der Tabelle.

	Preis 2008	Umsatz 2008	Preis 2011	Verbrauch 2011
Chips	1,00 € / Tüte	40,00 €	1,50 € / Tüte	50 Tüten
Erdnüsse	6,00 € / kg	36,00 €	9,00 € / kg	7 kg
Bier	4,20 € / ltr.	504,00 €	5,50 € / ltr.	150 ltr.

Berechnen Sie die Preisindizes nach Laspeyres und Paasche.

Lösung:

$$L_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}} \rightarrow \frac{1{,}50 \cdot 40 + 9{,}00 \cdot 6 + 5{,}50 \cdot 120}{40 + 36 + 504} = \frac{774}{580} = 1{,}3345$$

$$P_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{1i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{1i}} \rightarrow \frac{1{,}5 \cdot 50 + 9{,}00 \cdot 7 + 5{,}5 \cdot 150}{1{,}00 \cdot 50 + 6{,}00 \cdot 7 + 4{,}20 \cdot 150} = \frac{963}{722} = 1{,}3338$$

Regression- und Korrelationsrechnung

Aufgabe 288:

Sechs Personen werden zu ihrem Alter und ihrem Einkommen befragt:

Nettoeinkommen	y_i	500	600	1100	1500	2200	3100
Alter	x_i	20	21	25	28	36	44

Berechnen Sie die Regressionsgerade und den Korrelationskoeffizienten.

Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten von Bravais-Pearson:

Lösung:

Erstellen einer Arbeitstabelle:

Arbeiter	y_i	x_i	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	500	20	-1.000	-9	9.000	81	1.000.000
2	600	21	-900	-8	7.200	64	810.000
3	1.100	25	-400	-4	1.600	16	160.000
4	1.500	28	0	-1	0	1	0
5	2.200	36	700	7	4.900	49	490.000
6	3.100	44	1.600	15	24.000	225	2.560.000
Berech.	$\bar{y} = \frac{9000}{6} = 1.500$	$\bar{x} = \frac{174}{6} = 29$			46.700	436	5.020.000

Bestimmung von b:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{46.700}{436} = 107{,}11$$

Bestimmung von a:

$$a = y - b \cdot x = 1.500 - 107{,}11 \cdot 29 = -1.606{,}9$$

Die Regressionsgerade lautet:

$$y = -1.606{,}9 + 107{,}11x$$

Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten vonBravais-Pearson:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{1=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{46.700}{\sqrt{436 \cdot 5.020.000}} = 0{,}9982$$

Interpretation:

Zwischen dem Nettoeinkommen und dem Altere besteht ein sehr hoher korrelativer Zusammenhang

Aufgabe 289:

Eine renommierte Sektkellerei möchte einen hochwertigen Rieslingssekt auf den Markt bringen.

Für die Festlegung des Abgabepreises soll zunächst eine Preis-Absatz-Funktion ermittelt werden. Dazu wurde in n = 6 Geschäften ein Testverkauf durchgeführt. Man erhielt sechs Wertepaare mit dem Ladenpreis x (in Euro) einer Flasche und die verkaufte Menge y an Flaschen:

Laden	i	1	2	3	4	5	6
Preis einer Flasche	x_i	20	16	15	16	13	10
verkaufte Menge	y_i	0	3	7	4	6	10

Berechnen Sie die Regressionsgerade.

Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten von Bravais-Pearson:

Lösung:

Erstellen einer Arbeitstabelle:

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
20	0	-5	5	-25	25	25
16	3	-2	1	-2	1	4
15	7	2	0	0	0	4
16	4	-1	1	-1	1	1
13	6	1	-2	-2	4	1
10	10	5	-5	-25	25	25
$\bar{x} = \frac{90}{6} = 15$	$\bar{y} = \frac{30}{6} = 5$			-55	56	60

Bestimmung von b:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{-55}{56} = -0{,}9821$$

Bestimmung von a:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 5 - (-0{,}98) \cdot 15 = 19{,}70$$

Die Regressionsgerade lautet:

$y = 19{,}70 - 0{,}98x$

Jetzt noch die Weiterentwicklung berechnen.

Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten vonBravais-Pearson:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{1=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{-55}{\sqrt{56 \cdot 60}} = -0{,}949$$

Interpretation:

Zwischen dem Nettoeinkommen und dem Altere besteht eine sehr hohe negative korrelativer Zusammenhang. Dies bedeutet einen gegenläufigen Zusammenhang zwischen x und y. Steigt x, fällt y und umgekehrt.

Aufgabe 290:

Ein Kaufhaus möchte eine Aussage über den Preis X (in Euro) und den Absatz Y (in 100 Stück) eines Gutes machen. Um einen Zusammenhang zwischen beideb Größen zu ermitteln, legt das Kaufhaus den Preis X in 5 Filialen unterschiedlich fest.

X	3	4	5	6	12
Y	14	13	10	7	6

a) Berechnen Sie die Regressionsgerade.

b) Welchen Absatz kann das Unternehmen bei Unterstellung des linearen Zusammenhangs im Durchschnitt erwarten, wenn es den Preis auf 2 Euro senkt?

Lösung:

Erstellen einer Arbeitstabelle:

x_i	y_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})$
3	14	-3	9	4	16	-12
4	13	-2	4	3	9	-6
5	10	-1	1	0	0	0
6	7	0	0	-3	9	0
12	6	6	36	-4	16	-24
$\bar{x} = \frac{30}{5} = 6$	$\bar{y} = \frac{50}{5} = 10$		50		50	-42

Bestimmung von b:

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{-42}{50}=-0{,}84$$

Bestimmung von a:

$$a=\bar{y}-b\bar{x}=10-(-0{,}84)\cdot 6=15{,}04$$

Die Regressionsgerade lautet:

$$y=15{,}04-0{,}84x$$

Jetzt noch die Weiterentwicklung berechnen.

Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten von Bravais-Pearson:

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{1=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{-42}{\sqrt{50\cdot 50}}=-0{,}8400$$

b)

Einsetzen des Wertes x=2 in die Regressionsgerade:

$$y=15{,}04-0{,}84x=15{,}04-0{,}84\cdot 2=13{,}36$$

Man kann bei einem Preis von 2 Euro mit einem Absatz von 1336 Stück rechnen.

Aufgabe 291:

Von 4 Kfz sind das Alter und die Bremswege bei einer Vollbremsung von 100 km/h zum Stillstand gegeben:

Alter (Jahre)	4	7	11	2
Bremsweg (m)	50	80	70	48

a) Bestimmen Sie die Regressionsgerade und den Korrelationskoeffizienten.

b) Sie den erwarteten mittleren Bremsweg für 15 Jahre alte Fahrzeuge.

Lösung:

Erstellen einer Arbeitstabelle:

x_i	y_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})$
4	50	-2	4	-12	144	24
7	80	1	1	18	324	18
11	70	5	25	8	64	40
2	48	-4	16	-14	196	56
$\bar{x} = \frac{24}{4} = 6$	$\bar{y} = \frac{248}{4} = 62$		46	0	728	138

Bestimmung von b:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{138}{46} = 3$$

Bestimmung von a:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 62 - (3) \cdot 6 = 44$$

Die Regressionsgerade lautet:

$$y = 44 + 3x$$

Jetzt noch die Weiterentwicklung berechnen.

Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten von Bravais-Pearson:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{1=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{138}{\sqrt{46 \cdot 728}} = 0{,}7541$$

b)

Einsetzen des Wertes x=15 in die Regressionsgerade:

$$y = 44 + 3x = 44 + 3 \cdot 15 = 89$$

Man kann bei 15 Jahre alten Autos mit einem Bremsweg von 89 m rechnen.

Aufgabe 292:

In der folgenden Tabelle finden sie die produzierten Mengen (in 1.000 Stück) und die dabei entstandenen Kosten (in Tsd. Euro) für das erste Halbjahr des vergangenen Jahres.

Monat	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
Menge (in 1.000 Stück)	2	3	6	4	8	7
Kosten (in Tsd. Euro)	40	45	85	65	95	90

a) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen dem Regressor (Menge) und dem Regressand (Kosten) mit Hilfe einer Regressionsgeraden.

b) Bestimmen Sie auch die Stärke dieses Zusammenhangs mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson. Interpretieren Sie auch das erhaltene Ergebnis.

c) Welche Auswirkungen hätte die Ausweitung der Produktion auf 10 (in 1.000 Stück)? Führen Sie dafür eine Trendanalyse durch.

d) Wenn die Kosten auf 100 (in Tsd. Euro) steigen, mit welcher Menge kann dann gerechnet werden.

Lösung:

a)

Allgemeine Berechnung:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{275}{28} = 9{,}8214$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 70 - 9{,}8214 \cdot 5 = 20{,}8930$$

Damit ergibt sich für die Regressionsgerade:

$\hat{y} = 20{,}8930 + 9{,}8214x$

b)

Bestimmung des Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{275}{\sqrt{28 \cdot 2800}} = 0{,}9821$$

Der Korrelationskoeffizient von Bravais-Pearson nimmt nur Werte zwischen -1 und +1 an. Wertebereich von -1 bis +1:

r=+1 maximaler gleichgerichteter Zusammenhang, d.h. mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nehmen die Werte der Variablen Y tendenziell zu, wenn die X-Werte zunehmen.

c)

Der X-Wert von 10 wird in die Regressionsgerade eingesetzt, daraus ergibt sich dann der gesuchte y-Wert.

$$\hat{y} = 20{,}8930 + 9{,}8214\mathrm{x} = 20{,}8930 + 9{,}8214 \cdot 10 = 119{,}107$$

d)

Die Regressionsgerade wird nach dem gesuchten x-Wert umgestellt und der gegebene y-Wert eingesetzt.

$$\hat{y} = 20{,}8930 + 9{,}8214\mathrm{x}$$

$$x = \frac{\hat{y} - 20{,}8930}{9{,}8214} = \frac{100 - 20{,}8930}{9{,}8214} = 8{,}0546$$

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 293:

Von fünf ausgewählten Schülern wurden die Noten in Spanisch und Englisch notiert.

Schüler	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Spanisch	2	3	2	4	5
Englisch	1	2	2	3	4

Dabei ist Spanisch der Regressand und Englisch der Regressor.

a) Berechnen Sie die lineare Regressionsgerade.

b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson.

Lösung:

x	y	x-x	(x-x)²	y-y	(y-y)²	(x-x)*(y-y)
1	2	-1,40	1,96	-1,2	1,44	1,68
2	3	-0,40	0,16	-0,2	0,04	0,08
2	2	-0,40	0,16	-1,2	1,44	0,48
3	4	0,60	0,36	0,8	0,64	0,48
4	5	1,60	2,56	1,8	3,24	2,88
2,4	3,2		5,20		6,8	5,6
Steigung:		1,0769				
Achsenabschnitt:		0,6154				
Korrelationskoeffizient:		0,9417				

Aufgabe 294:

10 Studenten veranstalten einen Wettlauf. Die folgende Tabelle enthält die Körpergröße und die Platzierung:

Student	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Körpergröße	180	170	174	190	165	182	178	169	184	189
Platz	3	7	8	2	10	5	6	9	1	4

Berechne ein Maß für den Zusammenhang zwischen Körpergröße und Platzierung!

Lösung:

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
180	3	1,9	-2,5	-4,75	3,61	6,25
170	7	-8,1	1,5	-12,15	65,61	2,25
174	8	-4,1	2,5	-10,25	16,81	6,25
190	2	11,9	-3,5	-41,65	141,61	12,25
165	10	-13,1	4,5	-58,95	171,61	20,25
182	5	3,9	-0,5	-1,95	15,21	0,25
178	6	-0,1	0,5	-0,05	0,01	0,25
169	9	-9,1	3,5	-31,85	82,81	12,25
184	1	5,9	-4,5	-26,55	34,81	20,25
189	4	10,9	-1,5	-16,35	118,81	2,25
$\sum$		0	0	-204,50	650,90	82,50

Wir erhalten: $\bar{x} = \frac{1781}{10} = 178{,}1$ $\quad \bar{y} = \frac{55}{10} = 5{,}5$

$$s_x^{\ 2} = \frac{1}{9} \cdot 650{,}90 = 72{,}32 \qquad s_Y^{\ 2} = \frac{1}{9} \cdot 82{,}50 = 9{,}1\overline{6} \qquad s_{XY} = -\frac{1}{9} \cdot 204{,}50 = -22{,}72$$

$$r = -\frac{22{,}72}{\sqrt{72{,}32}\sqrt{9{,}1\overline{6}}} = -0{,}8824$$

Aufgabe 295:

Die Großhandelspreise zweier textiler Produkte zeigen folgende Bewegung:

X	22	2	25	26	31
Y	36	37	38	26	12

a) Berechnen Sie die Regressionsgerade

b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson

c) Interpretieren Sie den Zusammenhang zwischen dem Regressor und dem Regressand.

Lösung:

a) + b)

x	y	(x-x)	(x-x)²	(y-y)	(y-y)²	(x-x)(y-y)
22,00	36,00	0,80	0,64	6,20	38,44	4,96
2,00	37,00	-19,20	368,64	7,20	51,84	-138,24
25,00	38,00	3,80	14,44	8,20	67,24	31,16
26,00	26,00	4,80	23,04	-3,80	14,44	-18,24
31,00	12,00	9,80	96,04	-17,80	316,84	-174,44
21,20	29,80		502,80		488,80	-294,80
Steigung:		-0,5863				
Achsenabschnitt:		42,2299				
Korrel:		-0,5947				

c)

Bei steigenden x fällt y.

Aufgabe 296:

Bei einer zufällig ausgewählten Gruppe von Zuschauern an einem Basketballspiel kamen die nebenstehenden Messungen zustande.

Körpergröße in cm	Gewicht in kg
155	51
168	52
181	78
189	81
195	95
202	101

a) Berechnen Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.

b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson.

c) Mache Voraussagen für die folgenden Personen:

Person A: Größe = 1.77 m – Gewicht?

Person B: Gewicht = 91 kg – Größe?

Lösung:

a+b)

	Körpergröße in cm	Gewicht in kg	x-x	y-y	(x-x)^2	y-y^2	x*y	
	155	51	-26,67	-25,33	711,11	641,78	675,56	
	168	52	-13,67	-24,33	186,78	592,11	332,56	
	181	78	-0,67	1,67	0,44	2,78	-1,11	
	189	81	7,33	4,67	53,78	21,78	34,22	
	195	95	13,33	18,67	177,78	348,44	248,89	
	202	101	20,33	24,67	413,44	608,44	501,56	
Mittelwerte:	**181,67**	**76,33**			**1543,33**	**2215,33**	**1791,67**	Summe
Steigung:	1,161							
Achsenabschnitt:	-134,565							
Korrelationskoe.:	0,9690							

c)

Person A: Größe = 1.77 m – Gewicht $= 1{,}161 \cdot 177 - 134{,}565 = 70{,}93\text{kg}$

Person B: Gewicht = 91 kg – $Gewicht = \frac{91+134}{1{,}1} = 204{,}55$

Aufgabe 297:

Gegeben sei eine Ergebnisübersicht der Abiturprüfung Mathematik von 2012. Zudem sind auch noch die Vornoten gegeben.

Wie hängt das Ergebnis des Abiturs als abhängige Größe von der Vornote (unabhängige Größe) ab?

Berechnen Sie hierfür einen geeigneten Parameter und interpretieren Sie das Ergebnis.

Schülernummer	Vornote (x)	Ergebnis Abitur (y)
1	15	12
2	04	05
3	15	12
4	10	07
5	14	13
6	09	09
7	10	08
8	04	02
9	07	03
10	07	07

Lösung:

Schüler-nummer	Vornote(x)	Abitur (y)	x-x	$(x-x)^2$	(y-y)	$(y-y)^2$	(x-x)(y-y)
1	15	12	5,5	30,25	4,2	17,64	23,1
2	4	5	-5,5	30,25	-2,8	7,84	15,4
3	15	12	5,5	30,25	4,2	17,64	23,1
4	10	7	0,5	0,25	-0,8	0,64	-0,4
5	14	13	4,5	20,25	5,2	27,04	23,4
6	9	9	-0,5	0,25	1,2	1,44	-0,6
7	10	8	0,5	0,25	0,2	0,04	0,1
8	4	2	-5,5	30,25	-5,8	33,64	31,9
9	7	3	-2,5	6,25	-4,8	23,04	12
10	7	7	-2,5	6,25	-0,8	0,64	2
Summe				154,5		129,6	130
Mittelwert	9,5	7,8					

Berechnung des Korrelationskoeffizient:

$$r = \frac{130}{\sqrt{154,5 \cdot 129,6}} = 0,9187$$

Gleichartige Entwicklung; aber dies bedeutet nicht, dass die Schüler im Abitur die gleichen Noten erhalten haben wie bei der Vornote; allerdings können natürlich die Noten im Abitur von den Vornoten abweichen – aber die Entwicklung ist bei den Schülern identisch; im Vorfeld gute Schüler haben auch entsprechende Leistungen im Abitur – entgegengesetzte Entwicklungen sind nicht zu erkennen.

Aufgabe 298:

Bei einem Bundesliga Handballspiel von Frisch Auf Göppingen wurde bei einer Stichprobe von 8 erwachsenen Männer Ihre Größe in cm und ihr Bauchumfang in cm gemessen. Dabei ist die endogene Variable der Bauchumfang und die exogene Variable die Körpergröße.

Die Werte finden Sie in der folgenden Tabelle.

Nummer	Größe	Bauchumfang
1	177	119
2	166	108
3	159	101
4	180	100
5	189	112
6	210	105
7	171	120
8	182	111

a) Mit welchem Bauchumfang ist bei einer Größe von 191 zu rechnen?

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Größe und dem Bauchumfang? Geben Sie hierzu eine Zahl an, die den Sachverhalt wiederspiegelt.

Lösung:

a)

Nummer	Größe	Bauchumfang	(x_i-x)	$(x_i-x)^2$	(y_i-y)	$(y_i-y)^2$	$(x_i-x)(yi-y)$
1	177	119	-2,3	5,1	9,5	90,3	-21,4
2	166	108	-13,3	175,6	-1,5	2,3	19,9
3	159	101	-20,3	410,1	-8,5	72,3	172,1
4	180	100	0,8	0,6	-9,5	90,3	-7,1
5	189	112	9,8	95,1	2,5	6,3	24,4
6	210	105	30,8	945,6	-4,5	20,3	-138,4
7	171	120	-8,3	68,1	10,5	110,3	-86,6
8	182	111	2,8	7,6	1,5	2,3	4,1
Mittelwert:	179,3	109,5	Summe:	1707,5		394	-33
Steigung:		-0,0193					
Achsenabschnitt:		112,96					
Korrel:		-0,0402					
Es besteht kein Zusammenhang.							

$$b = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = \frac{-33}{1707{,}5} = -0{,}0193$$

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x} = 109{,}5 - (-0{,}0193) \cdot 179{,}3 = 112{,}96$$

b)

Berechnung des Korrelationskoeffizienten:

$$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_{xx} \cdot s_{yy}}} = \frac{-33}{\sqrt{1707{,}2 \cdot 394}} = -0{,}0402$$

Es besteht kein Zusammenhang.

Lorenzkurve und Gini-Koeffizient

Aufgabe 299:

Der Gesamtumsatz des Industriezweiges X verteilt sich wie folgt auf die einzelnen Unternehmen dieses Industriezweiges:

Umsatz (in 1000 Euro)	60	80	200	300	360
Unternehmen	A	B	C	D	E

Demgegenüber verteilt sich der Gesamtumsatz des Industriezweiges Y folgendermaßen auf die einzelnen Unternehmen dieses Industriezweiges:

Umsatz (in 1000 Euro)	200	220	240	260	280
Unternehmen	a	b	c	d	e

a) Zeichnen Sie die Lorenzkurve für beide Verteilungen in ein Diagramm.

b) Berechnen Sie für beide Verteilungen den Gini-Koeffizienten und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Lösung:

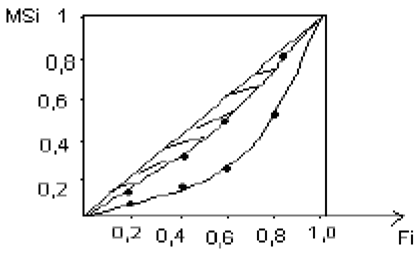
a)

Industriezweig "X":

Umsatz x_i	h_i	f_i	F_i	Umsatzanteil $x_i/\Sigma x_i$	MS_i
60	1	0,2	0,2	0,06	0,06
80	1	0,2	0,4	0,08	0,14
200	1	0,2	0,6	0,20	0,34
300	1	0,2	0,8	0,30	0,64
360	1	0,2	1,0	0,36	1,00
1000	5	1,0			

Industriezweig "Y":

Umsatz x_i	h_i	f_i	F_i	Umsatzanteil $x_i/\Sigma x_i$	MS_i
200	1	0,2	0,2	0,17	0,17
220	1	0,2	0,4	0,18	0,35
240	1	0,2	0,6	0,20	0,55
260	1	0,2	0,8	0,22	0,77
280	1	0,2	1,0	0,23	1,0
		1,0			



Fazit: Die Verteilung im Markt X (die am meisten gewölbte Linie in der Grafik, s.o.) ist stärker konzentriert als im Markt Y (die Linie, die näher an der 45° Linie liegt)

b)

$$G = \frac{2\sum_{i=1}^{n} i x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i} - \frac{n+1}{n}$$

$$= \frac{2\cdot(1\cdot 60 + 2\cdot 80 + 3\cdot 200 + 4\cdot 300 + 5\cdot 360)}{5\cdot(60+80+200+300+360)} - \frac{5+1}{5} = \frac{7640}{5000} - \frac{6}{5} = 0{,}328$$

$$= \frac{2\cdot(1\cdot 200 + 2\cdot 220 + 3\cdot 240 + 4\cdot 260 + 5\cdot 280)}{5\cdot(200+220+240+260+280)} - \frac{5+1}{5} = \frac{7600}{6000} - \frac{6}{5} = 0{,}067$$

<u>b)</u> <u>Gini-Koeffizient für Industriezweig "X":</u> $0 \le G \le 1$

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot (MS_i + MS_{i-1}) \quad \text{mit } MS_0 = 0$$

$G = 1 - [0{,}2\ (0{,}06+0) + 0{,}2\ (0{,}14+0{,}06) + 0{,}2\ (0{,}34+0{,}14) + 0{,}2\ (0{,}64+0{,}34) + 0{,}2\ (1{,}0+0{,}64)]$

$G = 1 - 0{,}6720 = 0{,}3280$

<u>Gini-Koeffizient für Industriezweig "Y":</u>

$G = 1 - [0{,}2\ (0{,}17+0) + 0{,}2\ (0{,}35+0{,}17) + 0{,}2\ (0{,}55+0{,}35) + 0{,}2\ (0{,}77+0{,}55) + 0{,}2\ (1{,}0+0{,}77)]$

$G = 1 - (0{,}034 + 0{,}07 + 0{,}034 + 0{,}11 + 0{,}07 + 0{,}154 + 0{,}11 + 0{,}2 + 0{,}154)$

$G = 1 - 0{,}9360 = 0{,}064$

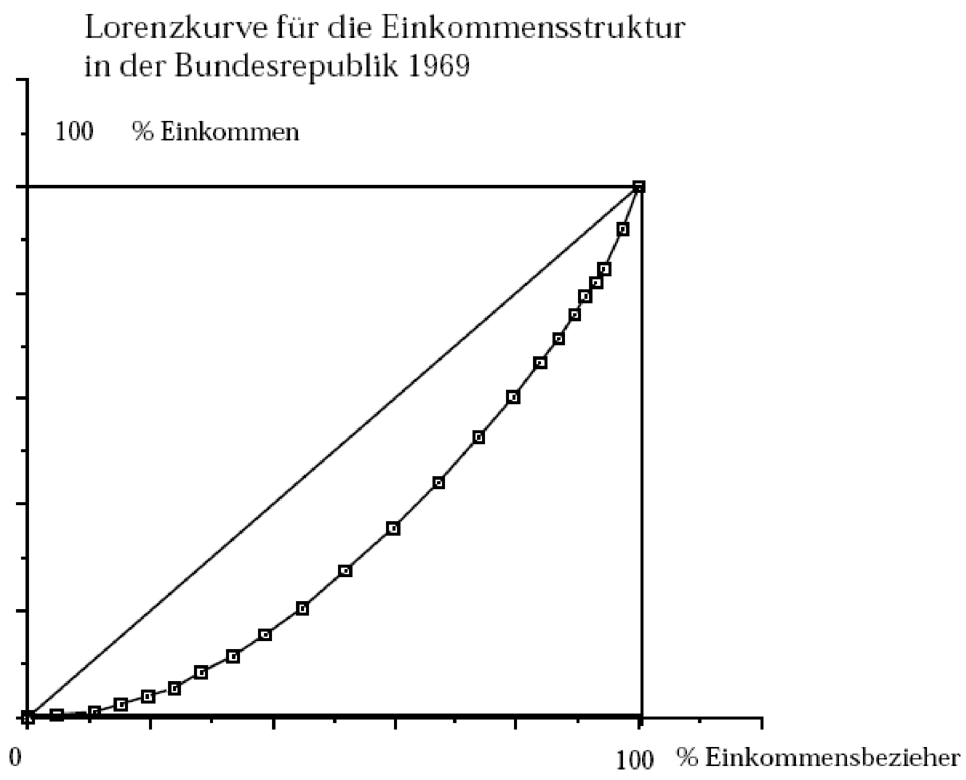
$\underline{G_X > G_Y}$

Aufgabe 300:

Bestimmen Sie die Lorenzkurve für die folgenden Zahlen der Bundesrepublik Deutschland bezogen auf das Jahr 1969 (nach Emrich, Wiesbaden 1979)

Einkommens-klasse	Einkommens-bezieher	Einkommen der Klasse	Einkommens-bezieher in % kumuliert	Einkommen der Klasse in % kumuliert
1	902	57	4.8	0.3
2	1135	149	10.8	1.2
3	823	246	15.2	2.3
4	823	350	19.6	3.8
5	796	448	23.8	5.7
6	876	548	28.5	8.3
7	955	650	33.6	11.6
8	989	750	38.9	15.6
9	1142	851	45.0	20.8
10	1298	950	51.9	27.4
11	1440	1050	59.6	35.5
12	1411	1148	67.1	44.2
13	1264	1247	73.8	52.7
14	1061	1347	79.4	60.4
15	800	1447	83.7	66.6
16	592	1545	86.9	71.5
17	467	1645	89.4	75.6
18	375	1748	91.4	79.1
19	293	1847	93.0	82.0
20	232	1947	94.2	84.4
21	627	2206	97.5	91.8
22	470	3239	100.0	100.0

Lösung:

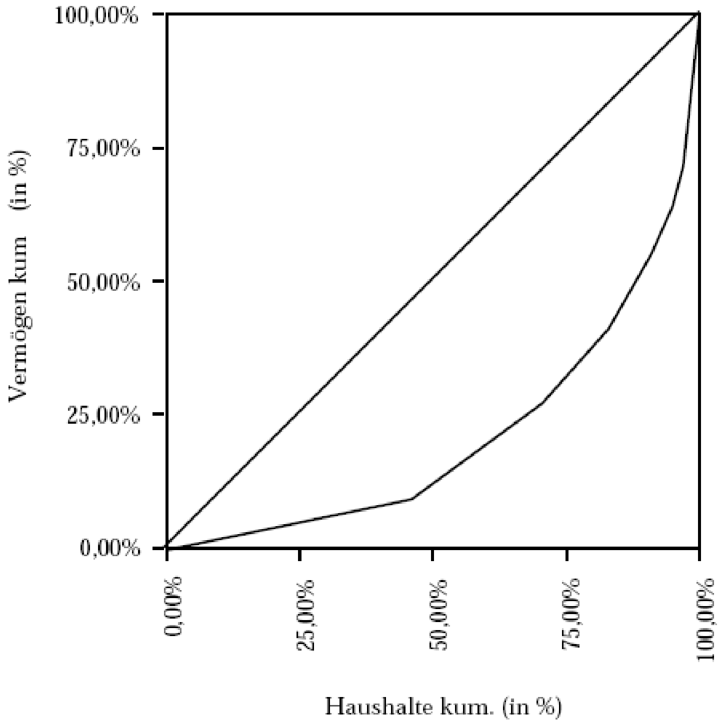


Aufgabe 301:

Zeichnen Sie eine Lorenzkurve, die das Ungleichgewicht zwischen Haushalten und Vermögen aufzeigt.

Vermögens-klassen	Haushalte (in Mio)	Haush. kum.	Haush. kum (%)	Vermögen (in Mrd DM)	Vermögen kum.	Verm. kum.(%)
unter 100.000 DM	16,0	16	45,98%	940	940	9,48%
100.000-250.000 DM	8,6	24,6	70,69%	1750	2690	27,12%
250.000-350.000 DM	4,2	28,8	82,76%	1420	4110	41,43%
350.000-500.000 DM	2,9	31,7	91,09%	1370	5480	55,24%
500.000-750.000 DM	1,3	33	94,83%	910	6390	64,42%
750.000-1.000.000 DM	0,8	33,8	97,13%	750	7140	71,98%
über 1.000.000 DM	1,0	34,8	100,00%	2780	9920	100,00%

Lösung:



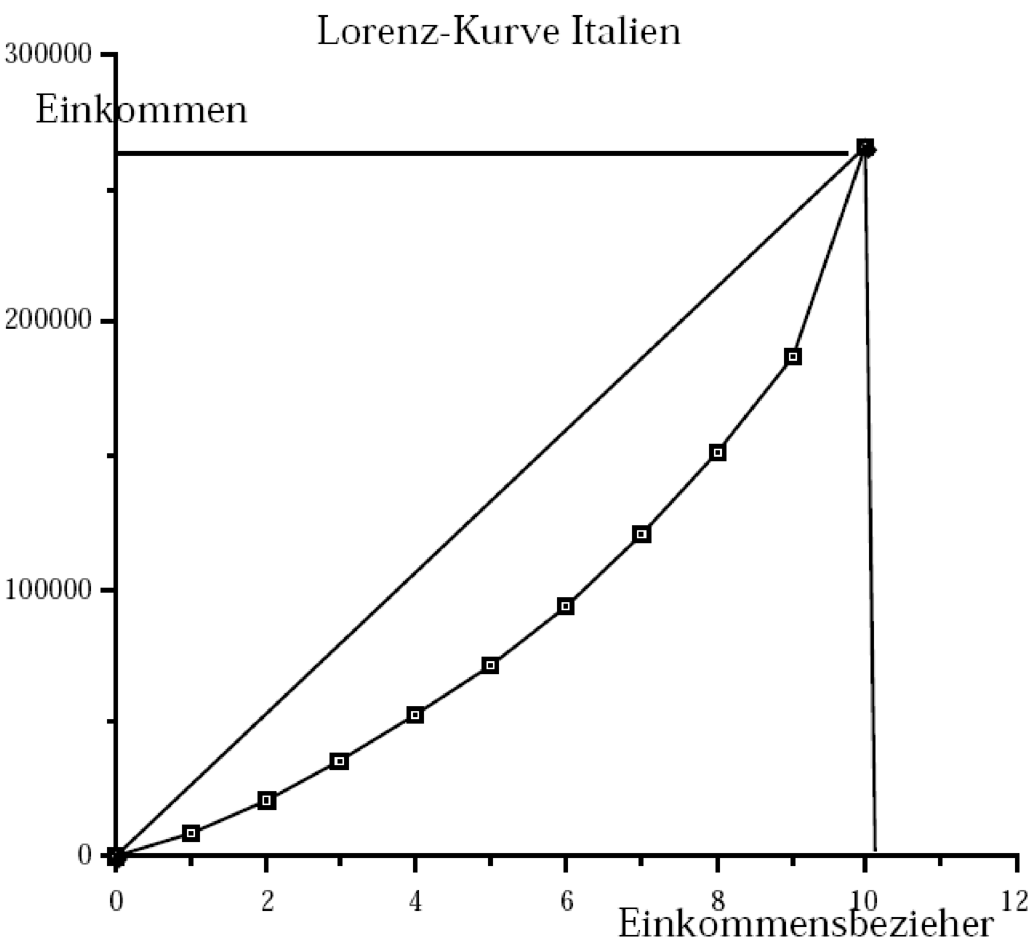
Aufgabe 302:

Betrachten Sie die folgende Stichprobe zur Einkommensverteilung für Italien:

Dezile	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Verfügbares Einkommen nach Steuern in Italien	8170	12860	14574	16980	19211	21917	26392	30563	35934	78597
Laufende Summe	8170	21030	35604	52584	71795	93712	120104	150667	186601	265198

Zeichnen Sie eine Lorenzkurve.

Lösung:



Aufgabe 303:

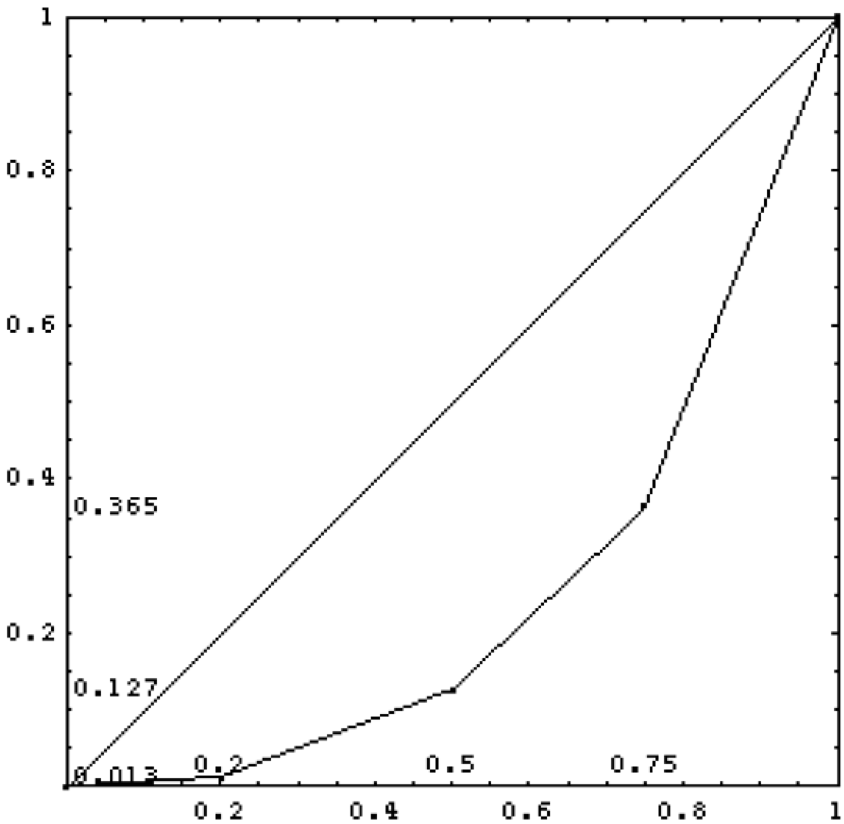
Für die Einzelhandelsunternehmen eines kleinen Bundeslandes S sei folgende Übersicht betrachtet:

Umsatz in DM 1000	Anzahl der Einzelhandelsunternehmen
[0 , 10)	200
[10 , 50)	300
[50 , 100)	250
[100 , 300)	250

Berechnen Sie die Werte der Lorenzkurve und stellen Sie die errechneten Werte graphisch dar. Welchen Anteil an der Merkmalssumme haben 20% (75%) der Merkmalswerte?

Lösung:

			x	Σx	y	Σy
0-10	$5 \cdot 200$	1000	0.20	0.20	0.013	0.013
10-50	$30 \cdot 300$	9000	0.30	0.50	0.114	0.127
50-100	$75 \cdot 250$	18750	0.25	0.75	0.238	0.365
100-300	$200 \cdot 250$	50000	0.25	1.00	0.635	1.000
		78750	1.00		1.000	



A= 0.10177; B= 0.245575; Gini-Koeffizient G= B/(A+B)= 0.49115

Wiederholungs- und alte Klausuraufgaben

Aufgabe 304:

Auf einem Markt seien z.B. 10 Unternehmen mit den folgenden Umsätzen vertreten (rechts wurden die Unternehmen nach Umsatz in eine aufsteigende Reihenfolge gebracht:

Unter-neh-men	Umsatz (TDM)
A	1000
B	500
C	1500
D	2500
E	1500
F	700
G	800
H	500
I	300
J	700
Summe	10000

Unter-neh-men	Umsatz (TDM)
I	300
B	500
H	500
F	700
J	700
G	800
A	1000
C	1500
E	1500
D	2500
Summe	10000

Zeichnen Sie die Lorenzkurve und berechnen Sie den Gini-Koeffizienten.

Lösung:

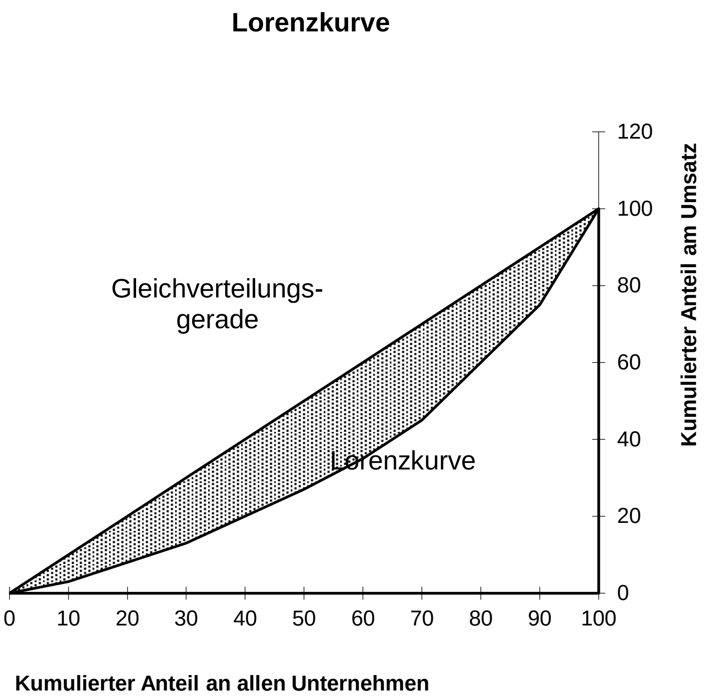
Daraus lassen sich für jedes Unternehmen der Anteil an der Anzahl aller Unternehmen sowie der Marktanteil bestimmen. Beide Reihen werden kumuliert:

Unter-nehmen	Anteil an allen Unter-nehmen %	Kumulierter Anteil an allen Unter-nehmen %	Umsatz (TDM)	Marktanteil in % s_i	Kumulierter Marktanteil s_i (in %)	Nummerie-rung der Unterneh-men i	Hilfsgrößen si*i	Hilfsgrößen si²
I	10%	10%	300	3%	3%	1	0,0300	0,0009
B	10%	20%	500	5%	8%	2	0,1000	0,0025
H	10%	30%	500	5%	13%	3	0,1500	0,0025
F	10%	40%	700	7%	20%	4	0,2800	0,0049
J	10%	50%	700	7%	27%	5	0,3500	0,0049
G	10%	60%	800	8%	35%	6	0,4800	0,0064
A	10%	70%	1000	10%	45%	7	0,7000	0,01
C	10%	80%	1500	15%	60%	8	1,2000	0,0225
E	10%	90%	1500	15%	75%	9	1,3500	0,0225
D	10%	100%	2500	25%	100%	10	2,5000	0,0625
Summe	100%		10000	100%			7,1400	0,1396

Zur Erläuterung soll beispielhaft die - schraffierte - Zeile mit den Angaben für das Unternehmen J herausgegriffen werden: Dieses Unternehmen ist eines von insgesamt 10 Unternehmen auf dem Markt, hat also einen Anteil von 10% an allen Unternehmen (Spalte 2). Zusammen mit den - kleineren - Unternehmen I, B, H, und F erreicht es kumuliert einen Anteil von 50% an allen Unternehmen. J macht einen Umsatz von 700. Dies entspricht einem Anteil von 7% an allen Umsätzen. Der kumulierte Umsatzanteil der Unternehmen I, B, H, F und J beträgt 27%.

Trägt man die Werte der beiden kumulierten Reihen in ein Koordinatensystem ein, erhält man eine Lorenzkurve: Die 10% kleinsten Unternehmen haben einen Umsatzanteil von 3%, die 20% kleinsten zusammen 8% ... die 90% größten 75% etc.

Die Lorenzkurve kann mit der Gleichverteilungsgerade verglichen werden, einer Lorenzkurve für den Sonderfall der völlig gleichmäßigen Verteilung der Marktanteile. In diesem Fall, wenn nämlich die Marktanteile aller Unternehmen genau gleich groß sind haben die 10% größten Unternehmen kumuliert 10% Marktanteil, die 20% größten 20% Marktanteil usw.



Die Lorenzkurve ist ein relatives Konzentrationsmaß. Sie misst Konzentration nur insoweit, als sie aus einer ungleichen Größenverteilung resultiert, nicht aber soweit sie aus einer insgesamt geringen Anbieterzahl folgt. Bei einer gleichmäßigen Verteilung der Marktanteile zwischen den Merkmalsträgern (z.B. Anbietern) verläuft die Lorenzkurve auf der Gleichverteilungsgerade, und zwar auch dann, wenn es nur sehr wenige Anbieter gibt.

Sie gibt Ausmaß und Struktur der relativen Konzentration vollständig wieder, ist aber i.a. praktisch schwer zu bestimmen, weil man Daten über alle Unternehmen eines Marktes braucht. Problematisch ist ferner, dass die Konzentration in einem Datenvektor und nicht in einer einzelnen Größe erfasst wird.

Zur Lösung des letzten Problems bietet sich der Gini-Koeffizient an, der die Fläche zwischen Lorenzkurve und Gleichverteilungsgerade ins Verhältnis setzt zur Dreiecksfläche zwischen der Gleichverteilungsgeraden und den Achsen des Koordinatensystems. Der Gini-Koeffizient nimmt Werte zwischen 0 und 1 an. Bei vollkommener Konzentration halten die (annähernd)100% kleinsten Unternehmen einen Umsatzanteil von zusammen kaum mehr als 0% und der verbleibende verschwindend kleine Rest der Unternehmen etwa 100% und der Gini-Koeffizient geht gegen 1.

$$G = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i \cdot i - 1 - \frac{1}{N} \qquad 0 \leq G \leq 1$$

mit

si = Marktanteil des i-ten Unternehmens

N = Anzahl der Unternehmen

Im oben angeführten Beispiel beträgt der Gini-Koeffizient

$$G = \frac{2}{10} 7{,}14 - 1 - \frac{1}{10} = 0{,}328$$.

Der Gini-Koeffizient hat gegenüber der Lorenzkurve den Vorteil, dass die Konzentration in einer einzigen Maßzahl erfasst wird, kann aber andererseits die Struktur der Verteilung nicht wiedergeben. Er kann, wie die meisten relativen Konzentrationsmaße, zu irreführenden Ergebnissen führen, etwa wenn auf einem Markt sehr kleine Anbieter ausscheiden. Da die verbleibende Anbietergruppe homogener ist, sinkt der Gini-Koeffizient, obwohl sich die Konzentration vergrößert hat.